

Pemodelan Lotka-Volterra Interaksi KDNK, PLA dan Harga Minyak Menggunakan Kaedah Euler Tak Piawai

(Lotka-Volterra Modeling of the Interaction of GDP, PLA and Oil Price Using Non-Standard Euler Method)

MOHAMMAD KHATIM HASAN*, NOOR ASHIKIN OTHMAN & BAHARI IDRUS

Pusat Kajian Teknologi Kecerdasan Buatan, Fakulti Teknologi dan Sains Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia

Diserahkan: 31 Oktober 2025/Diterima: 28 Julai 2026

ABSTRAK

Hubungan yang rumit antara Keluaran Dalam Negara Kasar (KDNK), Pelaburan Langsung Asing (PLA) dan Harga Minyak Mentah (HMM) adalah kunci untuk memahami sistem ekonomi, kerana pemboleh ubah ini secara kolektif mempengaruhi trajektori ekonomi nasional dan global. KDNK mencerminkan kesejahteraan ekonomi dan keyakinan pelabur, PLA berperanan sebagai pemangkin pertumbuhan dengan memperkenalkan modal dan teknologi, manakala HMM mempengaruhi kos pengeluaran, inflasi dan kestabilan negara pengekspor dan pengimport minyak. Kajian ini memberi tumpuan kepada Malaysia dengan hasil minyak dan PLA memainkan peranan penting dalam membentuk prestasi ekonomi. Model tak linear berinspirasi Lotka-Volterra baharu dicadangkan untuk menggambarkan hubungan saling kebergantungan antara KDNK, PLA dan HMM. Walau bagaimanapun, hasil ujian kestabilan mendedahkan bahawa titik keseimbangan sistem adalah tidak stabil dengan gangguan kecil mencetuskan dinamik berayun atau mencapah, mencerminkan kerentanan Malaysia terhadap kitaran ekonomi dan kejutan luaran. Penemuan ini menonjolkan hubungan dinamik antara pemboleh ubah tersebut serta ketidakstabilan yang wujud dalam ekonomi bergantung kepada tenaga. Model yang dicadangkan menawarkan pandangan kukuh terhadap hubungan tak linear antara KDNK, PLA dan HMM, sekali gus menekankan keperluan untuk intervensi dasar yang disasarkan bagi mengurangkan ketidakstabilan. Bagi memastikan ketepatan model dan mengatasi masalah kestabilan, kami menghasilkan kaedah Euler tak piawai (KETP), pendekatan berangka yang direka untuk mengekalkan sifat positif, keterbatasan dan kestabilan dalam simulasi. Hasil kajian menunjukkan ketepatan ramalan yang tinggi bagi KDNK dan PLA dengan nilai Peratusan Ralat Purata Mutlak (PRPM) yang rendah serta ketepatan yang munasabah bagi HMM. Dengan menyediakan kerangka ramalan, kajian ini melengkapkan pembuat dasar dan pelabur dengan alat untuk mengemudi landskap ekonomi Malaysia yang berubah-ubah, sambil menawarkan strategi untuk mengukuhkan daya tahan dan pertumbuhan mampan di tengah-tengah ketidakpastian pasaran tenaga global.

Kata kunci: Dinamik Lotka-Volterra; interaksi KDNK-PLA-HMM; kaedah Euler tak piawai (KETP); pemodelan harga minyak mentah; sistem ekonomi tak linear

ABSTRACT

The intricate interplay between Gross Domestic Product (GDP), Foreign Direct Investment (FDI), and Crude Oil Prices (COP) forms the cornerstone of understanding economic systems, as these variables collectively shape national and global economic trajectories. GDP reflects economic well-being and investor confidence, FDI serves as a growth catalyst by introducing capital and technology, while COP influences production costs, inflation, and the stability of oil-exporting and importing nations. This study focuses on Malaysia, where oil revenues and FDI play pivotal roles in shaping economic performance. A new Lotka-Volterra-inspired nonlinear model is proposed to capture the interdependencies between GDP, FDI, and COP. However, stability analysis shows that the system's equilibrium points are unstable, with minor disturbances triggering oscillatory or divergent dynamics, underscoring Malaysia's vulnerability to economic cycles and external shocks. These findings highlight the dynamic relationships between these variables and the inherent volatility in energy-dependent economies. The proposed model offers robust insights into the nonlinear connections between GDP, FDI, and COP, emphasizing the urgent need for targeted policy interventions to mitigate instability. To ensure model accuracy and address stability challenges, we developed a Nonstandard Euler Method (NSEM), a numerical approach designed to preserve positivity, boundedness, and stability in simulations. The results demonstrate high predictive accuracy for GDP and FDI, with low Mean Absolute Percentage Error (MAPE) values, alongside reasonable accuracy for COP. By providing a predictive framework, this study equips policymakers and investors with

essential tools to navigate Malaysia's ever-evolving economic landscape, offering strategies to bolster resilience and sustainable growth amidst global energy market uncertainties.

Keywords: Crude oil price modelling; GDP-FDI-COP interactions; Lotka-Volterra dynamics; nonlinear economic systems; nonstandard Euler method (NSEM)

PENGENALAN

Sistem ekonomi global mempunyai hubungan erat dengan pasaran tenaga, khususnya harga minyak mentah (HMM) yang berfungsi sebagai penentu utama indikator makroekonomi seperti Keluaran Dalam Negara Kasar (KDNK) dan Pelaburan Langsung Asing (PLA). Turun naik HMM mempengaruhi kos pengeluaran, perbelanjaan pengguna dan keputusan pelaburan, sekali gus memberi kesan terhadap kadar inflasi dan pertumbuhan ekonomi (Hamilton 1983). Ketidakstabilan harga minyak turut menjejaskan keyakinan pelabur dan aliran PLA, seterusnya mewujudkan kitaran maklum balas antara pasaran tenaga dan aktiviti ekonomi (Al-Mulali & Che Sab 2012). Kesan ini lebih ketara dalam ekonomi yang bergantung kepada minyak dengan tenaga menjadi sumber utama hasil fiskal danimbangan perdagangan.

Malaysia merupakan contoh relevan untuk meneliti interaksi ini. Sebagai sebuah negara pengeksport minyak, sektor tenaga memainkan peranan penting dalam menjana hasil kerajaan. Kenaikan HMM lazimnya meningkatkan hasil fiskal dan memperkukuh perbelanjaan awam, seterusnya merangsang pertumbuhan ekonomi (Majuca 2020). Namun, kebergantungan kepada hasil minyak mendedahkan Malaysia kepada risiko kejutan luaran, memandangkan penurunan harga minyak boleh menyebabkan defisit fiskal dan pertumbuhan ekonomi yang perlahan. Oleh itu, pemahaman terhadap hubungan tak linear antara KDNK, PLA dan HMM amat penting supaya dasar ekonomi dapat disesuaikan dengan keadaan dan keperluan ekonomi semasa.

PLA menjadi pemacu utama pertumbuhan ekonomi melalui pemindahan teknologi, pembangunan infrastruktur dan penciptaan peluang pekerjaan. Perubahan HMM memberi kesan langsung terhadap aliran PLA, khususnya dalam sektor berasaskan sumber. Harga minyak yang tinggi lazimnya menarik pelaburan dalam sektor tenaga, manakala ketidakpastian pasaran boleh mengurangkan kemasukan pelaburan (Ibrahim & Olakada 2020; Yang 2024). KDNK yang stabil dan berkembang menunjukkan kestabilan makroekonomi serta daya tarikan pelaburan (Zainal, Aziz & Md. Salleh 2021). Namun, hubungan antara ketiga-tiga pemboleh ubah ini bersifat kompleks dan dinamik.

Model matematik tak linear diperlukan untuk memahami hubungan tersebut secara mendalam. Model linear tradisional sering gagal menggambarkan ciri sebenar sistem apabila berlaku kejutan luaran seperti turun naik HMM. Kajian ini mengadaptasi model Lotka-Volterra yang asalnya menganalisis dinamik mangsa-pemangsa (Lotka 1925; Shim & Fishwick 2008),

namun kemudiannya diaplikasi dalam sistem ekonomi (Hasan, Othman & Idrus 2022, 2019; Wu & Liu 2013). Model ini membolehkan analisis hubungan timbal balik antara KDNK, PLA dan HMM dengan penekanan terhadap sifat tak linear dan mekanisme maklum balas ekonomi (Othman, Hasan & Idrus 2020).

Dalam kerangka Lotka-Volterra, KDNK bertindak sebagai penunjuk kesihatan ekonomi yang mempengaruhi kemasukan PLA melalui kestabilan pasaran (Asiedu 2002). HMM pula bertindak sebagai pemacu kos dan indikator ekonomi yang memberi kesan terhadap KDNK melalui perubahan harga pengeluaran dan inflasi (Sadorsky 1999). Turun naik harga minyak turut mengubah corak PLA dengan mempengaruhi daya tarikan pelaburan, terutama di negara pengeksport minyak (Haq, Khan & Gul 2020). Oleh itu, kaedah berangka yang mengekalkan kestabilan sistem diperlukan bagi simulasi yang tepat.

Kajian ini mencadangkan kaedah Euler tak piawai (KETP) baharu, satu pendekatan berangka yang direka untuk sistem tak linear dan ia mampu mengekalkan ciri kualitatif utama seperti keterbatasan dan kestabilan (Mickens 1993) terhadap tiga faktor makroekonomi, iaitu KDNK, PLA dan HMM. Pendekatan tak piawai dan piawai telah digunakan oleh Hasan, Othman dan Idrus (2025, 2022, 2019), Hasan dan Mazlan (2017), serta Othman dan Hasan (2017) dalam biologi dan model ekonomi tetapi penyelidik ini hanya mempertimbangkan interaksi dua faktor makroekonomi sahaja. Penggunaan KETP membolehkan simulasi lebih stabil dan realistik, menjadikannya sesuai untuk menganalisis interaksi KDNK, PLA dan HMM dalam konteks ekonomi Malaysia.

Ketika Malaysia beralih daripada kebergantungan minyak kepada ekonomi pelbagai sektor, hubungan antara KDNK, PLA dan HMM kekal signifikan (Majuca 2020; Seng-Wong & Shamsudin 2017). Walaupun perkembangan sektor pembuatan dan perkhidmatan mengurangkan sensitiviti KDNK terhadap HMM, sektor tenaga masih memainkan peranan penting bagi hasil kerajaan danimbangan perdagangan. Oleh itu, pemahaman yang mendalam tentang interaksi ini adalah penting bagi pembuat dasar dan pelabur dalam merancang strategi pertumbuhan mampan, khususnya dalam menghadapi ketidakpastian persekitaran ekonomi global.

HMM dipengaruhi oleh keseimbangan permintaan-penawaran dan faktor geopolitik, menjadikannya salah satu penentu utama dalam keputusan pelaburan (Valenti, Manera & Sbuelz 2020). Kenaikan HMM memberi kesan positif kepada negara pengeksport seperti Malaysia melalui

peningkatan hasil fiskal dan pelaburan awam (Majuca 2020), manakala negara pengimport menghadapi tekanan kos pengeluaran yang memperlambatkan pertumbuhan (Ahmad et al. 2022). Di Asia Selatan, kejutan harga minyak turut mempengaruhi inflasi, kadar faedah dan kadar pertukaran (Umar et al. 2020).

Hubungan antara HMM dan PLA berbeza mengikut konteks ekonomi sesebuah negara. Di Nigeria, kenaikan HMM meningkatkan aliran masuk PLA dalam sektor tenaga kerana pelabur mencari pulangan tinggi (Ibrahim & Olakada 2020). Namun, ketidakpastian harga minyak mentah mengurangkan minat pelabur akibat peningkatan risiko yang sukar dijangka. Negara dengan sistem ekonomi kukuh lebih berupaya untuk memanfaatkan aliran masuk PLA (Yang 2024). Dhrifi (2015) mendapati bahawa kesan positif PLA terhadap pertumbuhan ekonomi lebih ketara di negara berpendapatan sederhana dan tinggi, menunjukkan kepentingan kesiapsiagaan ekonomi.

Dalam konteks Malaysia, HMM mempunyai pengaruh ketara terhadap KDNK. Kenaikan USD1 dalam harga minyak Brent dikaitkan dengan peningkatan sekitar MYR646 juta dalam KDNK sebenar (Majuca 2020). Namun, kesan ini berkurang seiring dengan usaha kepelbagaian ekonomi, iaitu daripada MYR902 juta kepada MYR488 juta. Ini menandakan struktur ekonomi Malaysia yang semakin seimbang dan lebih berdaya tahan terhadap ketidakpastian pasaran minyak. Walaupun begitu, turun naik HMM masih menjejaskan keyakinan pelabur serta mempengaruhi aliran masuk PLA (Seng - Wong & Shamsuddin 2017).

Secara keseluruhannya, hubungan antara KDNK, PLA dan HMM dalam ekonomi Malaysia adalah saling bergantung dan bersifat dinamik. Paras HMM yang tinggi berpotensi meningkatkan KDNK dan menarik aliran masuk PLA, tetapi ketidakstabilan harga minyak boleh mencetuskan ketidakpastian ekonomi dan seterusnya mengekang pertumbuhan. Model tiga faktor berasaskan Lotka-Volterra yang dibangunkan dalam kajian ini tidak dapat diselesaikan menggunakan kaedah piawai (seperti yang telah ditunjukkan oleh keputusan dari analisis kestabilan). Oleh itu, KETP menyediakan asas analisis kukuh untuk memahami mekanisme tak linear yang wujud dalam sistem ini. Pemahaman yang mendalam terhadap interaksi tersebut adalah penting bagi merangka strategi pembangunan ekonomi Malaysia yang mampan, berdaya saing dan berdaya tahan terhadap kejutan pasaran tenaga global.

METODOLOGI

Dalam topik ini, kami membangunkan satu sistem persamaan terbitan biasa yang menggambarkan interaksi antara faktor KDNK sebagai pemangsa 1, PLA sebagai mangsa dan HMM sebagai pemangsa 2. Kami mencadangkan satu persamaan dinamik interaksi PLA-KDNK-HMM seperti yang ditunjukkan dalam Persamaan (1),

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\alpha_1 - \beta_1 y - \gamma_1 z + \delta_1 x + \delta_3 yz) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-\alpha_2 + \beta_2 x + \delta_2 z) \\ \frac{dz}{dt} &= z(-\alpha_3 + \gamma_2 x + \delta_3 y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

yang memperlihatkan ciri masalah tegar. Dalam model ini, y mewakili KDNK; x ialah aliran masuk PLA; dan z ialah HMM. Parameter seperti α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 , δ_1 dan δ_3 digunakan untuk menerangkan kadar pertumbuhan, keamatan interaksi dan kadar kemerosotan.

Reka bentuk dan pembinaan model yang menyerupai Lotka-Volterra ini dibangunkan berdasarkan andaian bahawa KDNK, HMM dan PLA saling berkait melalui hubungan tak linear. Pekali positif seperti α_1 , β_2 , γ_2 , δ_1 dan δ_3 menunjukkan kesan yang menggalakkan pertumbuhan, manakala pekali negatif seperti α_2 , α_3 , β_1 dan γ_1 mencerminkan kekangan atau pengaruh persaingan.

Kehadiran sebutan silang di dalam persamaan ini memainkan peranan penting dalam mewakili interaksi tak linear antara KDNK, PLA dan HMM. Struktur matematik ini membolehkan model mengambil kira kelangsungan kitaran maklum balas, kesan ketepuan serta sifat saling bergantung antara satu sama lain. Tambahan pula, model ini berupaya merungkai mekanisme bagaimana harga minyak mempengaruhi KDNK dan PLA melalui saluran ekonomi utama seperti kos tenaga, hasil sumber asli danimbangan perdagangan. Pada masa yang sama, ia turut menterjemahkan impak kemasukan PLA ke atas KDNK dan dinamik harga minyak, lantas mempertegas kewujudan rangkaian interaksi yang kompleks antara ketiga-tiga pemboleh ubah makroekonomi ini. Model ini mentafsir faktor makroekonomi dan interaksi antara mereka seperti berikut:

Hubungan PLA-KDNK

Kesan positif PLA terhadap KDNK ($\beta_2 x$) mencerminkan peranan pelaburan asing dalam meningkatkan produktiviti ekonomi. Namun, perencatan PLA oleh KDNK ($-\beta_1 y$) boleh mewakili kesan ketepuan dengan prestasi ekonomi yang tinggi mengurangkan kebergantungan atau daya tarikan pelaburan asing dalam sektor tertentu.

Hubungan KDNK-HMM

Harga minyak yang tinggi meningkatkan KDNK ($\delta_3 z$), mencerminkan sifat ekonomi Malaysia yang bergantung kepada eksport minyak. Sebaliknya, pertumbuhan KDNK meningkatkan permintaan terhadap minyak ($\delta_2 y$), yang seterusnya boleh mendorong kenaikan HMM. Ini mewujudkan satu kitaran maklum balas positif yang mengukuhkan kebergantungan ekonomi terhadap minyak.

Hubungan HMM-PLA

HMM yang tinggi menekan aliran masuk PLA ($-\gamma_1 z$), berkemungkinan disebabkan oleh tekanan inflasi atau

perubahan keutamaan pelaburan ke arah sektor minyak dan gas. Walau bagaimanapun, pengaruh positif PLA terhadap HMM (γ_2x) menunjukkan bahawa pelaburan asing dalam infrastruktur tenaga boleh menyokong atau meningkatkan pengeluaran minyak, sekali gus mempengaruhi harga pasaran.

Walaupun pasaran global merupakan penentu utama arah aliran HMM, pengekal HMM sebagai pemboleh ubah endogen dalam model ini membolehkan persamaan matematik mengambil kira tindak balas tempatan yang wujud antara HMM, KDNK dan PLA. Hal ini merangkumi peranan aliran masuk PLA dalam meningkatkan kapasiti infrastruktur tenaga domestik serta pengaruh lonjakan permintaan tenaga yang terhasil daripada pertumbuhan KDNK (Huseynli 2023). Keputusan model ini turut membuktikan bahawa struktur endogen sedia ada sudah memadai untuk mereplikasi data sebenar dengan kadar ralat (PRPM) yang minimum.

Interaksi Tak Linear (δ_3yz)

Sebutan interaksi tak linear δ_3yz dalam model ini mewakili mekanisme kesan sinergi antara KDNK (y) dan HMM (z) terhadap aliran masuk PLA(x). Gabungan KDNK dan HMM yang tinggi pada satu-satu masa menghasilkan impak timbal balik yang bercampur terhadap kebolehpayaan negara menarik PLA (Elheddad, Bassim & Ahmed 2021; Muhammad 2021). Biarpun pengembangan KDNK secara asasnya menggambarkan kestabilan yang menggalakkan kemasukan pelaburan, namun apabila ia digabungkan dengan HMM yang melambung tinggi, interaksi ini (yz) memberi tekanan baharu melalui peningkatan beban kos tenaga terhadap sektor pelaburan bukan komoditi (seperti pembuatan). Di samping itu, landskap ekonomi yang terlalu berpaksakan hasil tenaga melahirkan risiko tumpuan minyak, yang sekali gus bertindak sebagai faktor penghalang (sejajar dengan nilai pekali δ_3 yang negatif) bagi pelabur asing yang mensasarkan strategi kepelbagaian portfolio jangka panjang.

PENGANGGARAN PARAMETER

Parameter bagi Persamaan (1) dianggarkan menggunakan data cerapan lepas dari tahun 2009 ke tahun 2018. Data yang digunakan termasuk pertumbuhan KDNK per kapita (peratus tahunan) daripada *World Development Indicators* (World Bank 2024b), harga minyak mentah Brent (HMM) dalam dolar per tong daripada *World Bank Commodity Price Data* (World Bank 2024a) dan PLA, aliran masuk bersih (% daripada KDNK) juga daripada *World Development Indicators*.

Parameter optimum bagi model ini ditentukan menggunakan algoritma pengoptimuman Nelder-Mead simplex. Proses ini dijalankan dengan menetapkan jumlah ralat kuasa dua sebagai fungsi objektif yang perlu diminimumkan. Secara khususnya, algoritma ini mencari set parameter yang meminimumkan ralat perbezaan kuasa

dua antara trajektori data simulasi berangka dan data cerapan sebenar bagi pemboleh ubah KDNK, PLA dan HMM di sepanjang tempoh kajian. Setelah proses pengoptimuman mencapai penumpuan, nilai parameter optimum yang diperoleh adalah seperti berikut:

$$\alpha_1 = 1.79822147, \alpha_2 = 0.133987509, \alpha_3 = 0.021305454, \beta_1 = 1.09005213,$$

$$\beta_2 = 0.285854858, \gamma_1 = 0.0000487912939, \gamma_2 = 0.0869635189, \delta_1 = -0.999987692, \delta_3 = -0.0432321982.$$

ANALISIS KESTABILAN

Analisis kestabilan terhadap model ekonomi yang menyerupai Lotka-Volterra telah dijalankan bagi Persamaan (1), dengan menggunakan prosedur analisis kestabilan piawai (Atici & Tuna 2025).

Titik keseimbangan diperoleh dengan menetapkan $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$, yang mewakili keadaan sistem berada dalam keseimbangan. Maka:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha_1 - \beta_1y - \gamma_1z + \delta_1x + \delta_3yz) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ atau } \alpha_1 - \beta_1y - \gamma_1z + \delta_1x + \delta_3yz = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-\alpha_2 + \beta_2x + \delta_3z) = 0 \rightarrow y(-\alpha_2 + \beta_2x + \delta_3z) = 0 \rightarrow y = 0 \text{ atau } -\alpha_2 + \beta_2x + \delta_3z = 0 \rightarrow z = \frac{\alpha_2 - \beta_2x}{\delta_3},$$

$$\frac{dz}{dt} = z(-\alpha_3 + \gamma_1x + \gamma_2y + \delta_3y) = 0 \rightarrow z = 0 \text{ atau } z(-\alpha_3 + \gamma_2x + \delta_3y) = 0 \rightarrow y = \frac{\alpha_3 - \gamma_2x}{\delta_3}.$$

Dengan menggantikan $y = \frac{\alpha_3 - \gamma_2x}{\delta_3}$ dan $z = \frac{\alpha_2 - \beta_2x}{\delta_3}$ ke dalam persamaan $\alpha_1 - \beta_1y - \gamma_1z + \delta_1x + \delta_3yz = 0$, menghasilkan: $\alpha_1 - \beta_1\left(\frac{\alpha_3 - \gamma_2x}{\delta_3}\right) - \gamma_1\left(\frac{\alpha_2 - \beta_2x}{\delta_3}\right) + \delta_1x + \delta_3\left(\frac{\alpha_3 - \gamma_2x}{\delta_3}\right)\left(\frac{\alpha_2 - \beta_2x}{\delta_3}\right) = 0$.

Dengan menggantikan nilai parameter optimum ke dalam persamaan dan menyelesaikan untuk x , titik keseimbangan bagi x ialah -5.55 dan 0.711. Maka, nilai y pada titik keseimbangan ialah -11.617 dan 0.938, manakala nilai z ialah -39.799 dan 1.602. Oleh sebab semua faktor tidak boleh bernilai negatif dalam konteks ekonomi, maka titik keseimbangan akhir yang sah ialah: (0.711, 0.938, 1.602).

Untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan ini, sistem dilinearakan di sekitar titik (x^*, y^*, z^*) . Proses ini melibatkan pengiraan matrik Jacobian, yang mewakili terbitan separa tertib pertama bagi persamaan terhadap pemboleh ubah x, y dan z .

Matriks Jacobian, J diberi oleh

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,1}}{\partial x} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial y} & \frac{\partial f_{1,1}}{\partial z} \\ \frac{\partial f_{1,2}}{\partial x} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial y} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial z} \\ \frac{\partial f_{1,3}}{\partial x} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial y} & \frac{\partial f_{1,3}}{\partial z} \end{bmatrix},$$

yang $f_1 = x(\alpha_1 - \beta_1 y - \gamma_1 z + \delta_1 x + \delta_3 yz)$, $f_2 = y(-\alpha_2 + \beta_2 x + \delta_3 z)$ dan $f_3 = z(-\alpha_3 + \gamma_2 x + \delta_3 y)$.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \alpha_1 - \beta_1 y - \gamma_1 z + 2\delta_1 x + \delta_3 yz, \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\beta_1 x + \delta_3 xz, \text{ dan } \frac{\partial f_1}{\partial z} = -\gamma_1 x + \delta_3 yx.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \beta_2 y, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -\alpha_2 + \beta_2 x + \delta_3 z, \text{ dan } \frac{\partial f_2}{\partial z} = \delta_3 y.$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \gamma_2 z, \frac{\partial f_3}{\partial y} = \delta_3 z, \text{ dan } \frac{\partial f_3}{\partial z} = -\alpha_3 + \gamma_2 x + \delta_3 y.$$

Oleh itu,

$$J = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 y - \gamma_1 z + 2\delta_1 x + \delta_3 yz & -\beta_1 x + \delta_3 xz & -\gamma_1 x + \delta_3 yx \\ \beta_2 y & -\alpha_2 + \beta_2 x + \delta_3 z & \delta_3 y \\ \gamma_2 z & \delta_3 z & -\alpha_3 + \gamma_2 x + \delta_3 y \end{bmatrix}.$$

Pengiraan penentu bagi matriks Jacobian ($J - \lambda I$) menghasilkan persamaan cirian:

$0.0048024 - 0.2221823\lambda + 0.1393779\lambda^2 - \lambda^3$. Dengan menyelesaikan persamaan ini, diperoleh nilai eigen:

$\lambda = 0.0587552 + 0.4649306i, 0.0587552 - 0.4649306i$ dan 0.0218674 .

Nilai eigen bagi sistem persamaan pembezaan memberikan gambaran tentang kestabilan dan tingkah laku sistem berhampiran titik keseimbangan. Sepasang nilai eigen kompleks konjugat diperoleh. Bahagian nyata 0.0588 adalah positif, menunjukkan bahawa titik keseimbangan adalah tidak stabil. Bahagian khayalan $\pm 0.465i$ menunjukkan tingkah laku berayun di sekitar titik keseimbangan dengan frekuensi ditentukan oleh magnitud bahagian khayalan. Nilai eigen nyata 0.0219 juga positif. Nilai ini menyumbang kepada ketidakstabilan kerana ia menunjukkan gangguan dalam arah tersebut akan bertumbuh secara eksponen tanpa ayunan.

Kehadiran nilai eigen dengan bahagian nyata positif bermakna titik keseimbangan adalah tidak stabil. Gangguan kecil daripada keseimbangan akan menyebabkan sistem menyimpang daripadanya dari semasa ke semasa. Nilai eigen kompleks konjugat menunjukkan bahawa ketidakstabilan melibatkan trajektori berputar. Gangguan bertambah sambil berayun, mencerminkan tingkah laku kitaran dalam pemboleh ubah sistem.

Memandangkan bahagian nyata nilai eigen kompleks 0.0588 sedikit lebih besar daripada nilai eigen nyata 0.0219 , dinamik sistem berkemungkinan didominasi oleh ketidakstabilan berayun berbanding pertumbuhan eksponen semata-mata. Ini menunjukkan bahawa interaksi antara PLA (x), KDNK (y) dan HMM (z) adalah secara semula jadi tidak stabil di sekitar titik keseimbangan. Gangguan dalam satu pemboleh ubah (contohnya kejutan kepada harga minyak atau aliran masuk PLA) tidak akan kembali ke keseimbangan, sebaliknya akan bertambah dan berkemungkinan mencipta kitaran atau trajektori berputar dalam sistem.

Ketidakstabilan ini mencadangkan bahawa hubungan yang dimodelkan tidak seimbang secara semula jadi dari semasa ke semasa, sebaliknya membawa kepada kitaran pertumbuhan dan kemerosotan atau bahkan penyimpangan yang mungkin selari dengan kitaran ekonomi sebenar seperti fasa ledakan dan kemelesetan. Sebagai contoh, turun naik dalam HMM boleh mencetuskan tingkah laku berayun dalam KDNK dan PLA, manakala dinamik PLA yang tidak stabil boleh memperkuat ayunan tersebut.

KAEDAH EULER TAK PIAWAI

Dalam menyelesaikan model Lotka–Volterra yang bersifat tidak linear, pelbagai kaedah berangka telah digunakan. Bagi masalah persamaan terbitan biasa (PTB) peringkat pertama yang tegar, pendekatan konvensional seperti kaedah beza terhingga (KBT) sering kali tidak mencukupi kerana mudah terdedah kepada ketidakstabilan dan kehilangan sifat keabadian. Oleh itu, kaedah berangka yang lebih mantap seperti Backward Differentiation Formula (BDF) diperkenalkan untuk meningkatkan kestabilan dan ketepatan simulasi jangka panjang. Pendekatan ini membolehkan analisis dinamik mangsa-pemangsa dijalankan dengan lebih realistik tanpa menghasilkan ralat berangka yang tidak munasabah seperti populasi negatif atau penyimpangan daripada keadaan keseimbangan (Hairer & Wanner 1996; Shampine 1994). Selain itu, Anguelov, Lubuma dan Mureithi (2008) dan Mickens (2000) pula telah memperkenalkan kaedah beza terhingga tak piawai (KBTP) untuk mengatasi masalah seperti ini.

Kaedah beza terhingga tak piawai (KBTP) dibangunkan dengan merangka skema diskret yang mengekalkan ciri kualitatif persamaan pembezaan asal seperti kepositifan, keterbatasan dan hukum keabadian (Anguelov, Lubuma & Mureithi 2008; Mickens 2000; Ramos 2018). KBTP tidak seperti KBT biasa kerana ia memelihara konsistensi dinamik antara penyelesaian berangka dan model selanjut, lantas menawarkan simulasi model Lotka–Volterra yang lebih tepat dan boleh dipercayai. Kaedah KBTP amat berguna dalam mensimulasikan tingkah laku berayun dan stabil yang wujud secara semula jadi dalam sistem Lotka–Volterra, menjadikannya alternatif yang kukuh untuk menyelesaikan model tak linear seperti ini (Cui & Zhao 2020).

Berteraskan kerangka tak piawai (Hasan, Othman & Idrus 2022; Mickens 2000; Ramos 2018), kajian ini membangunkan kaedah Euler tak piawai (KETP) sebagai satu penyelesaian baharu. Pendekatan ini memastikan kestabilan berangka serta mengekalkan sifat keterbatasan pemboleh ubah. Tidak seperti kaedah berangka piawai, KETP melakukan penskalaan langkah masa secara dinamik dan memodelkan sebutan tak linear secara khusus bagi memelihara tingkah laku kualitatif sistem tersebut. Dengan mengaplikasikan kaedah pendiskretan tak piawai dan menetapkan fungsi h khusus sebagai penyebut, persamaan kemas kini diskret yang berikut telah diterbitkan.

Untuk x (mangsa),

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha_1 - \beta_1 y - \gamma_1 z + \delta_1 x + \delta_3 y z).$$

Dengan mengaplikasikan KBT dapat dihasilkan

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = x_i \cdot (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i).$$

Memudahkan hubungan ini menghasilkan kaedah Euler Piawai

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot x_i \cdot (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i).$$

Untuk y (pemangsa 1),

$$\frac{dy}{dt} = y(-\alpha_2 + \beta_2 x + \delta_3 z).$$

Dengan mengaplikasikan KBT dapat dihasilkan

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = y_i \cdot (-\alpha_2 + \beta_2 x_i + \delta_3 z_i).$$

Memudahkan hubungan ini menghasilkan kaedah Euler Piawai

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot y_i \cdot (-\alpha_2 + \beta_2 x_i + \delta_3 z_i).$$

Untuk z (pemangsa 2),

$$\frac{dz}{dt} = z(-\alpha_3 + \gamma_2 x + \delta_3 y)$$

Dengan mengaplikasikan KBT dapat dihasilkan

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta t} = z_i \cdot (-\alpha_3 + \gamma_2 x_i + \delta_3 y_i).$$

Memudahkan hubungan ini menghasilkan kaedah Euler Piawai

$$z_{i+1} = z_i + \Delta t \cdot z_i \cdot (-\alpha_3 + \gamma_2 x_i + \delta_3 y_i).$$

Walau bagaimanapun, pendekatan ini boleh menyebabkan ketidakstabilan berangka atau pertumbuhan yang tidak realistik bagi persamaan tegar seperti Persamaan (1), terutamanya apabila pekali seperti $\beta_1 y_i$, $\beta_2 x_i$, $\delta_3 z_i$, $\gamma_2 x_i + \delta_3 y_i$ dan δ_3 dan $\gamma_1 z_i$ menjadi besar. Oleh itu, pengubahsuaian kaedah Euler tak piawai (KETP) dilaksanakan. Bagi menangani senario apabila nilai $\beta_1 y_i$, $\beta_2 x_i$, $\delta_3 z_i$, $\gamma_2 x_i$, $\delta_3 y_i$ dan $\gamma_1 z_i$ berpotensi menjadi besar, kami diskretkan Persamaan (1) menggunakan pendekatan KBTTP.

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = x_{i+1} \cdot (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i).$$

$$x_{i+1} - x_i = \Delta t (x_{i+1} \cdot (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i)).$$

$$x_{i+1} - \Delta t (x_{i+1} \cdot (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i)) = x_i$$

$$x_{i+1} (1 - \Delta t (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i)) = x_i$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{(1 - \Delta t (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i))}.$$

Dalam kaedah yang dinyatakan ini, penyebut dalam persamaan akan mengelakkan ketidakstabilan atau pertumbuhan yang tidak realistik.

$$\frac{dy}{dt} = y(-\alpha_2 + \beta_2 x + \delta_3 z).$$

Seperti mana persamaan mangsa yang dinyatakan, kami diskretkan menggunakan pendekatan KBTTP. Maka, kami memperoleh:

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - \Delta t (-\alpha_2 + \beta_2 x_i + \delta_3 z_i)}.$$

$$\frac{dz}{dt} = z(-\alpha_3 + \gamma_2 x + \delta_3 y)$$

Dengan mengikuti pendekatan yang serupa, kami memperoleh:

$$z_{i+1} = \frac{z_i}{1 - \Delta t (-\alpha_3 + \gamma_2 x_i + \delta_3 y_i)}.$$

Penyebut dalam persamaan ini akan mengekalkan sifat positif, memastikan bahawa pemboleh ubah keadaan (x , y , z) kekal tidak negatif atau menyimpang secara terkawal. Oleh itu, persamaan kemas kini KETP kami adalah seperti yang dinyatakan dalam Persamaan (2).

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{x_i}{(1 - \Delta t (\alpha_1 - \beta_1 y_i - \gamma_1 z_i + \delta_1 x_i + \delta_3 y_i z_i))}, \\ y_{i+1} &= \frac{y_i}{1 - \Delta t (-\alpha_2 + \beta_2 x_i + \delta_3 z_i)}, \\ z_{i+1} &= \frac{z_i}{1 - \Delta t (-\alpha_3 + \gamma_2 x_i + \delta_3 y_i)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

HASIL DAN PERBINCANGAN

Simulasi berangka memainkan peranan penting dalam menganalisis kebergantungan kompleks antara KDNK, PLA dan HMM dalam kerangka tak linear yang dicadangkan. Dengan menggunakan KETP, kami memastikan ciri utama sistem seperti kepositifan, keterbatasan dan kestabilan dikekalkan, sekali gus menawarkan pendekatan yang kukuh untuk mengkaji kedinamikan ekonomi Malaysia. Simulasi ini bukan sahaja memberikan pengesahan kuantitatif terhadap model, malah menyerlahkan keupayaannya untuk mereplikasi tingkah laku dan interaksi ekonomi sebenar dengan tepat.

Bagi mengukur tahap ketepatan model, Peratusan Ralat Purata Mutlak (PRPM) dikira bagi kesemua pemboleh ubah sepanjang tempoh simulasi. Penggunaan ukuran ralat berasaskan peratusan ini dijustifikasikan oleh kesesuaiannya dengan siri masa makroekonomi (Hewamalage, Ackermann & Bergmeir 2023). Pencapaian metrik ini membuktikan sejauh mana simulasi model mencerminkan realiti data sebenar, sekali gus mengukuhkan kesesuaiannya sebagai instrumen untuk ramalan dan pembentukan dasar.

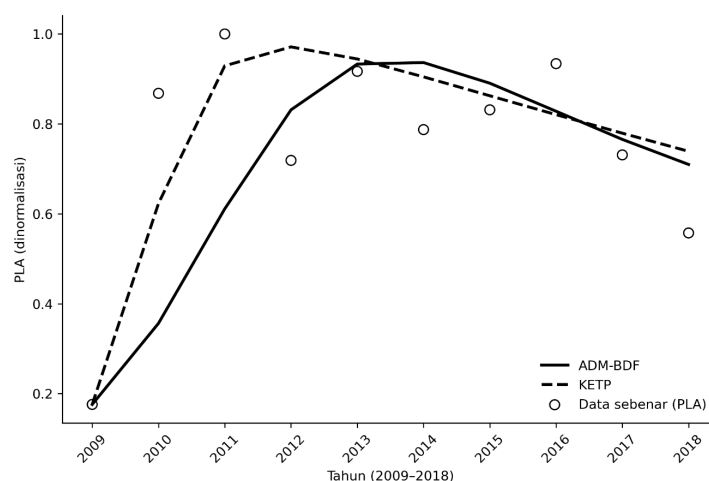
Kami turut mensimulasikan model makroekonomi yang menyerupai Lotka-Volterra menggunakan algoritma LSODA dalam *Python* (algoritma ini menggunakan

kaedah Adams-BDF untuk masalah tegar). Kaedah ini dapat digunakan untuk mensimulasikan model berasaskan Lotka-Volterra yang dibangunkan kerana algoritma ini menggunakan kaedah BDF yang merupakan kaedah tersirat dan sesuai untuk menyelesaikan masalah tegar. Rajah perbandingan bagi kaedah KETP, Adams-BDF dan data sebenar bagi PLA, KDNK dan HMM dipaparkan pada Rajah 1-9. Ringkasan perbandingan PRPM bagi kaedah KETP dan Adams-BDF ditunjukkan dalam Jadual 1, memberikan gambaran tentang ketepatan dan kestabilan model yang dicadangkan. Untuk menilai nilai PRPM bagi kedua-dua kaedah, rujukan dibuat dalam Jadual 2.

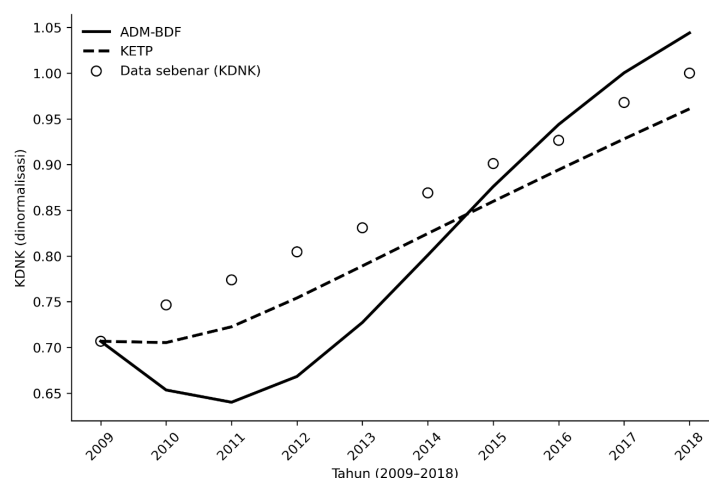
Selain itu, perbandingan juga dibuat menggunakan $\Delta t = 0.9$ dan $\Delta t = 1.05$. Perbandingan dalam bentuk graf boleh dirujuk pada Rajah 1-3 dan 7-9.

Keputusan menunjukkan bahawa nilai PRPM bagi PLA dan KDNK mencapai tahap ketepatan yang tinggi, manakala HMM merekodkan ketepatan yang munasabah yang lebih tepat dari kaedah Adams-BDF (dalam algoritma LSODA). Keadaan ini menonjolkan kecekapan model dalam mereplikasi dinamik PLA dan KDNK secara jitu, di samping mengekalkan ralat unjuran HMM pada kadar yang minimum. Rekod PRPM yang rendah ini membuktikan bahawa struktur interaksi yang dibina dalam model adalah konsisten dengan sifat data cerapan sebenar di sepanjang tempoh simulasi. Secara tuntasnya, ia mengesahkan bahawa model ini telah ditentukan secara optimum dan bersedia berfungsi sebagai instrumen yang utuh untuk ramalan dan analisis dasar.

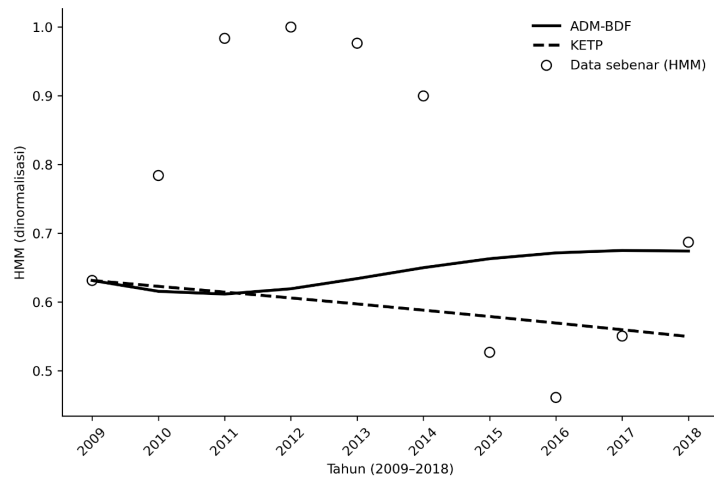
Berdasarkan perbandingan nilai PRPM (Jadual 1 & 2), kaedah yang dicadangkan menunjukkan tahap ketepatan



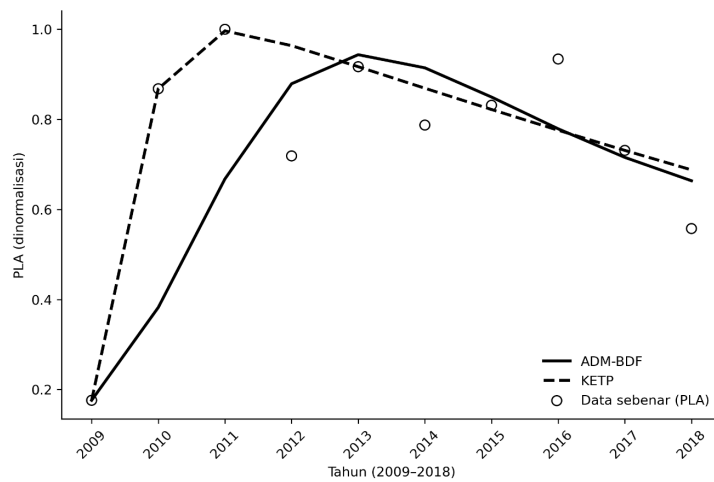
RAJAH 1. Graf perbandingan PLA bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 0.9$



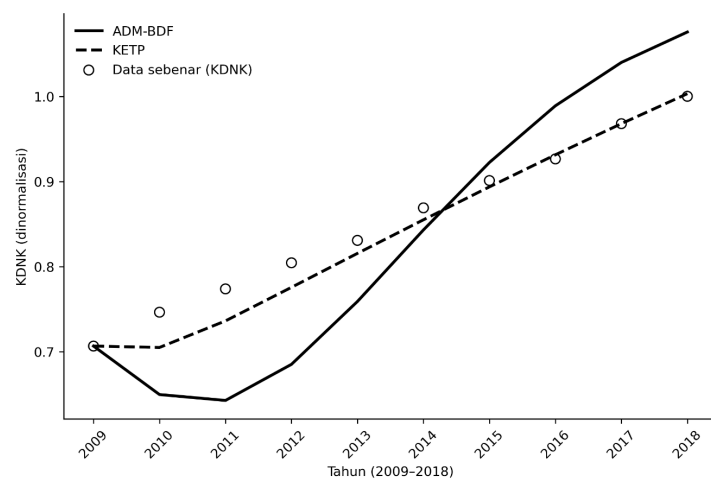
RAJAH 2. Graf perbandingan KDNK bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 0.9$



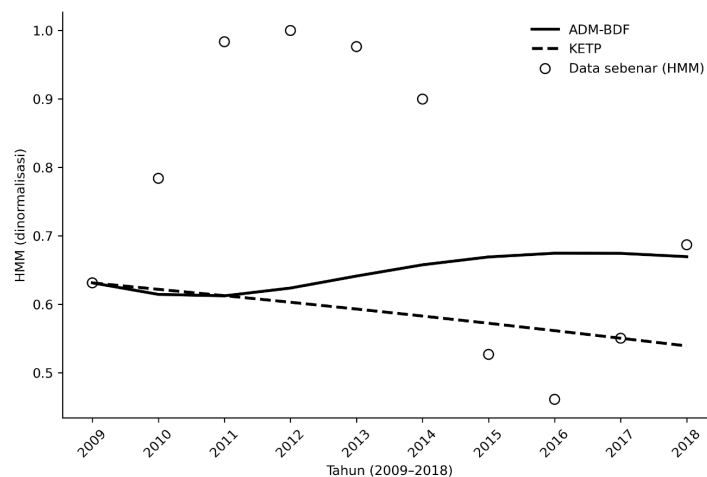
RAJAH 3. Graf perbandingan HMM bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 0.9$



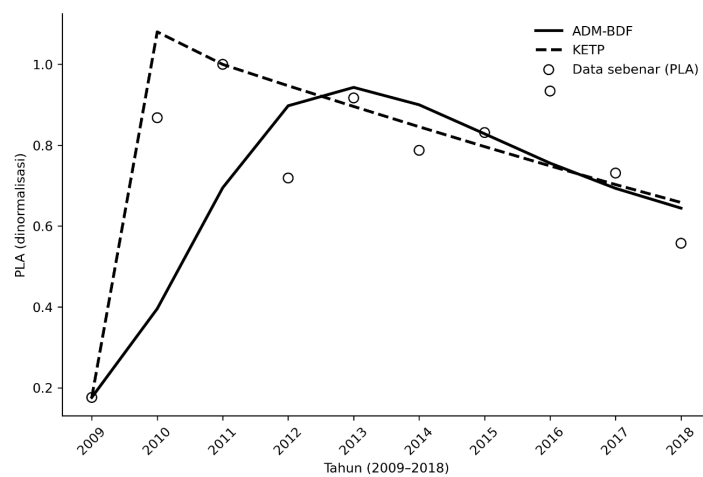
RAJAH 4. Graf perbandingan PLA bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 1$



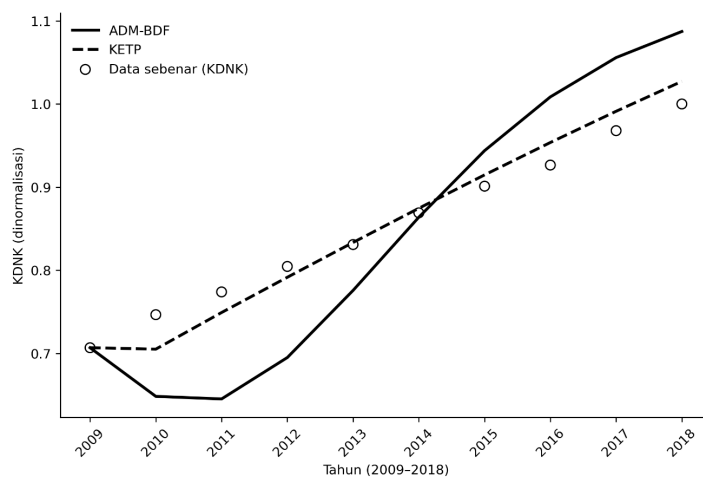
RAJAH 5. Graf perbandingan KDNK bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 1$



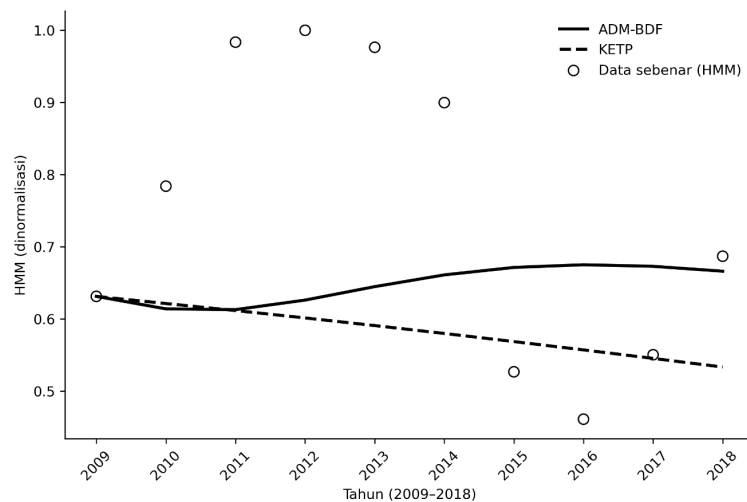
RAJAH 6. Graf perbandingan HMM bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 1$



RAJAH 7. Graf perbandingan PLA bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 1.05$



RAJAH 8. Graf perbandingan KDNK bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 1.05$



RAJAH 9. Graf perbandingan HMM bagi KETP dan Adams-BDF dengan $\Delta t = 1.05$

JADUAL 1. Perbandingan PRPM bagi kaedah KETP dan Adams-BDF

Δt	Faktor	Adams-BDF	KETP
0.9	Aliran masuk bersih PLA	17.05	14.34
	(% dari KDNK)		
	Pertumbuhan KDNK per kapita (% tahunan)	8.04	4.46
1.0	Harga minyak mentah (HMM) (Brent) (\$/bbl)	25.66	22.60
	Aliran masuk bersih PLA (% dari KDNK)	17.04	8.63
	Pertumbuhan KDNK per kapita (% tahunan)	8.04	1.91
1.05	Harga minyak mentah (HMM) (Brent) (\$/bbl)	25.66	22.45
	Aliran masuk bersih PLA (% dari KDNK)	17.05	11.19
	Pertumbuhan KDNK per kapita (% tahunan)	8.04	2.09
1.05	Harga minyak mentah (HMM) (Brent) (\$/bbl)	25.66	22.55

JADUAL 2. Jadual prestasi Peratusan Ralat Purata Mutlak (PRPM)

PRPM	Keupayaan ramalan
Kurang daripada 10	Ketepatan tinggi
10 hingga kurang 20	Ketepatan baik
20 hingga kurang 50	Ketepatan sederhana
Melebihi 50	Ketepatan rendah

yang lebih tinggi berbanding algoritma LSODA. Walaupun analisis kestabilan sebelum ini membuktikan bahawa titik keseimbangan model dalam Persamaan (1) pada dasarnya tidak stabil akibat nilai eigen dengan bahagian nyata yang positif, pendekatan tak piawai yang dicadangkan ini berjaya mengatasi isu ketidakstabilan berangka tersebut secara berkesan.

Ini mencerminkan bahawa walaupun model sesuai dengan data yang diperhatikan dalam julat penentuan, ketidakstabilan semula jadi menekankan kepentingan faktor luaran, campur tangan dasar atau dinamik lain adalah perlu untuk mengekalkan keseimbangan dalam ekonomi Malaysia. Ia menunjukkan bahawa sistem dinamik mungkin melibatkan kitaran ekonomi atau kejutan luaran yang menghalang keseimbangan jangka panjang.

KESIMPULAN

Keputusan analisis menunjukkan bahawa model Lotka-Volterra yang dicadangkan bersama KETP berjaya mensimulasikan interaksi kompleks antara PLA, KDNK dan HMM dalam ekonomi Malaysia. Hal ini dibuktikan melalui ketepatan yang tinggi (nilai PRPM yang rendah) bagi PLA dan KDNK, serta ketepatan yang munasabah bagi HMM. Hasil kajian ini membuktikan bahawa model mampu mencerminkan tingkah laku ekonomi sebenar, sekali gus memberikan gambaran yang jelas mengenai hubungan antara pemboleh ubah tersebut.

Struktur model yang bersifat tak linear membolehkannya mencerminkan dinamik dan kesalingbergantungan yang wujud dalam ekonomi Malaysia. Dalam konteks ini, pertumbuhan KDNK dan aliran masuk PLA amat dipengaruhi oleh turun naik harga minyak, manakala kewujudan kitaran maklum balas terus memangkin interaksi yang lebih kompleks. Keupayaan ini menyerlahkan potensi model tersebut sebagai instrumen analitikal yang berkesan untuk merungkai rangkaian ekonomi serta mensimulasikan pelbagai senario dasar mahupun kejutan luaran.

Walaupun bagaimanapun, analisis kestabilan mendedahkan bahawa sistem ini secara semula jadinya adalah tidak stabil di sekitar titik keseimbangan. Sebarang gangguan berupaya mencetuskan trajektori yang berayun ataupun mencapai. Hal ini membuktikan bahawa dinamik interaksi makroekonomi Malaysia, seperti mana yang dimodelkan, tidak akan mencapai suatu keadaan stabil yang mutlak. Sebaliknya, ia sentiasa tertakluk kepada kemruapan dan ketidaktentuan yang secara tepat mencerminkan hakikat kitaran ekonomi dunia sebenar. Tambahan pula, impak positif KDNK terhadap PLA berserta pengaruh ketara HMM ke atas KDNK adalah amat sejajar dengan profil sebuah negara membangun yang mengeksport komoditi minyak. Secara tuntasnya, penemuan ini memberi amaran tentang kerentanan sistem terhadap kejutan luaran, sekali gus menegaskan keperluan mendesak terhadap campur tangan dasar dan pengurusan makroekonomi yang teliti

bagi melestarikan trajektori pertumbuhan serta meredakan ketidaktentuan pasaran.

Kajian lanjutan akan menumpukan kepada pelaksanaan analisis sensitiviti yang lebih menyeluruh bagi menilai ketahanan model terhadap perubahan parameter. Analisis ini dijangka memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang daya tahan model serta kebolehgunaannya dalam pelbagai senario makroekonomi. Dengan itu, ia akan melengkapkan keputusan kajian semasa dan memperkukuh kebolehpercayaan kaedah berangka yang dicadangkan.

PENGHARGAAN

Kajian ini telah dibiayai oleh Kementerian Pendidikan Tinggi Malaysia melalui Skim Geran Penyelidikan Fundamental (FRGS) di bawah nombor geran FRGS/1/2021/ICT06/UKM/02/2.

RUJUKAN

- Ahmad, I., Iqbal, S., Khan, S., Han, H., Vega-Munoz, A. & Ariza-Montes, A. 2022. Macroeconomic effects of crude oil shocks: Evidence from South Asian countries. *Frontiers in Psychology* 13: 967643. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.967643>
- Al-Mulali, U. & Che Sab, C.N.B. 2012. The impact of energy consumption and CO₂ emission on the economic growth and financial development in the Sub Saharan African countries. *Energy* 39(1): 316-322.
- Anguelov, R., Lubuma, J.M.S. & Mureithi, E.W. 2008. Non-standard finite difference methods for differential equations modeling. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 221(2): 381-399.
- Asiedu, E. 2002. On the determinants of foreign direct investment to developing countries: Is Africa different? *World Development* 30(1): 107-119.
- Atici, S. & Tuna, G. 2025. A deterministic approach to modelling the dynamics of vulnerabilities, cyberattacks, and security hardening using Lotka–Volterra equation. *The Journal of Supercomputing* 81: 1000. <https://doi.org/10.1007/s11227-025-07393-6>
- Cui, J. & Zhao, L. 2020. Improved numerical techniques for economic differential equations. *Economic Modelling* 87: 349-360.
- Dhrifi, A. 2015. Foreign direct investment, technological innovation and economic growth: Empirical evidence using simultaneous equation model. *International Review of Economics* 62: 381-400.
- Elheddad, M., Bassim, M. & Ahmed, R. 2021. FDI and economic growth in the GCC: Does the oil sector matter? *Economics and Business Letters* 10(3): 178-190.
- Hamilton, J.D. 1983. Oil and the macroeconomy since World War II. *Journal of Political Economy* 91(2): 228-248.

- Haq, S.U., Khan, M.S.A. & Gul, B. 2020. Economic determinants of foreign direct investment: Empirical evidence from South Asian economies. *Global Regional Review* V(III): 336-343. [https://doi.org/10.31703/grr.2020\(V-III\).36](https://doi.org/10.31703/grr.2020(V-III).36)
- Hasan, M.K. & Mazlan, S. 2017. Adapting non-standard weighted average approach for solving the Lotka-Volterra model. *Pertanika Journal of Sci. Technology* 25: 97-106.
- Hasan, M.K., Othman, N.A. & Idrus, B. 2025. Modeling of gross domestic product with foreign direct investment using Lotka-Volterra equations. *Sains Malaysiana* 54(9): 2287-2300. <http://doi.org/10.17576/jsm-2025-5409-15>
- Hasan, M.K., Othman, N.A. & Idrus, B. 2022. Data-driven macro-economic model analysis using non-standard trimean algorithm. *Dlm Intelligent Systems Modeling and Simulation II. Studies in Systems, Decision and Control*, disunting oleh Abdul Karim, S.A. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04028-3_9
- Hasan, M.K., Othman, N.A. & Idrus, B. 2019. Relationship analysis of Malaysian gross domestic product and foreign direct investment using numerical method with optimization approach. *International Journal of Advanced Science and Technology* 28(16): 410-416.
- Hairer, E. & Wanner, G. 1996. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Series in Computational Mathematics 14. DOI: 10.1007/978-3-642-05221-7
- Hewamalage, H., Ackermann, K. & Bergmeir, C. 2023. Forecast evaluation for data scientists: Common pitfalls and best practices. *Data Mining and Knowledge Discovery* 37: 788-832. <https://doi.org/10.1007/s10618-022-00894-5>
- Huseynli, B. 2023. Causality relationship between the development of the oil and gas sector and foreign investments. *International Journal of Energy Economics and Policy* 13(2): 404-409.
- Ibrahim, A.U. & Olakada, N.M. 2020. Evaluating the effect of crude oil prices on foreign direct investment: A Nigerian perspective. *European Journal of Business and Management* 12(17): 85-92.
- Lotka, A.J. 1925. Elements of physical biology. *Nature* 116(2917): 461. <https://doi.org/10.1038/116461b0>
- Majuca, R.P. 2020. *Assessing the Impact of Oil Prices on the Malaysian Economy Working Paper WP/20-02*. The ASEAN+3 Macroeconomic Research Office (AMRO).
- Mickens, R.E. 2000. *Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*. World Scientific Publishing Company. <https://www.perlego.com/book/845892/applications-of-nonstandard-finite-difference-schemes-pdf>
- Mickens, R.E. 1993. *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*. World Scientific Publishing Company. <https://www.perlego.com/book/845372/nonstandard-finite-difference-models-of-differential-equations-pdf>
- Muhammad, S. 2021. Oil price and foreign direct investment in Nigeria: New evidence from structural breaks and a nonlinear analysis. *CBN Bullion* 45(4): 58-66.
- Othman, N.A. & Hasan, M.K. 2017. New hybrid two-step method for simulating Lotka Volterra model. *Pertanika J. Sci. Technology* 25(S6): 115-124.
- Othman, N.A., Hasan, M.K. & Idrus, B. 2020. The crude oil price power on Malaysia GDP: Relationship analysis employing numerical method with optimisation approach. *Test Engineering & Management* 83(March- April): 1101-1107.
- Ramos, H.G. 2018. Nonstandard finite difference methods in economic modeling: Case studies and insights. *Applied Mathematics and Computation* 329: 193-204.
- Sadorsky, P. 1999. Oil price shocks and stock market activity. *Energy Economics* 21(5): 449-469.
- Seng-Wong, K.K. & Shamsudin, M. N. 2017. Impact of crude oil price, exchange rates and real GDP on Malaysia's food price fluctuations: Symmetric or asymmetric? *International Journal of Economics and Management* 11(1): 259-275.
- Shampine, L.F. 1994. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. New York: Chapman & Hall/Routledge. <https://doi.org/10.1201/9780203745328>
- Shim, H. & Fishwick, P.A. 2008. Visualization and interaction design for ecosystem modeling. *Dlm. Encyclopedia of Ecology*. disunting oleh Jørgensen, S.E. & Fath, B.D. Massachusetts: Academic Press. hlm. 3685-3693. <https://doi.org/10.1016/B978-008045405-4.00225-1>
- Umar, M., Ji, X., Kirikkaleli, D. & Xu, Q. 2020. COP21 Roadmap: Do innovation, financial development, and transportation infrastructure matter for environmental sustainability in China? *J. Environ. Manage.* 271: 111026. doi: 10.1016/j.jenvman.2020.111026
- World Bank. 2024a. *World Bank Commodity Price Data*. <https://thedocs.worldbank.org/en/doc/18675f1d1639c7a34d463f59263ba0a2-0050012025/>
- World Bank. 2024b. *World Development Indicators*. <https://databank.worldbank.org>
- Wu, L. & Liu, S. 2013. Using grey Lotka-Volterra model to analyze the relationship between the gross domestic products and the foreign direct investment of Ningbo City. *Proceedings of 2013 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services (GSIS)*, Macao, China. pp. 265-268. doi: 10.1109/GSIS.2013.6714796

- Valenti, D., Manera, M. & Sbuelz, A. 2020. Interpreting the oil risk premium: Do oil price shocks matter? *Energy Economics* 91: 104906. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2020.104906>
- Yang, S.P. 2024. The determinants and growth effects of foreign direct investment: A comparative study. *Journal of Risk and Financial Management* 17(12): 541. <https://doi.org/10.3390/jrfm17120541>
- Zainal, Z., Aziz, M.I.A. & Md. Salleh, M.F. 2021. The effect of asymmetrical relationship of oil price shocks on GDP. *Jurnal Ekonomi Malaysia* 55(2): 121-135.
- *Pengarang untuk surat-menyurat; email: mkh@ukm.edu.my