Jurnal Kejuruteraan 13 (2001) 41-49

Kaedah Unsur Terhingga Menggunakan Kaedah Lelaran Kumpulan Tak Tersirat Bagi Masalah Resapan Satu Matra

Jumat Sulaiman
Abdul Rahman Abdullah

ABSTRAK

Kajian kaedah lelaran blok yang telah dilakukan terdahulu hanya tertumpu ke atas kaedah beza terhingga. Dalam makalah ini, dikemukakan perumusan dan aplikasi skema kaedah lelaran 2,3 dan 4 Kumpulan Tak Tersirat (KTT) ke atas persamaan penghampiran unsur terhingga bagi masalah resapan satu matra. Satu uji kaji barangka dilaksanakan untuk memperlihatkan kecekapan pengiraan kaedah lelaran KTT ke atas unsur terhingga.

Katakunci: persamaan resapan, kaedah Kumpulan Tak Tersirat, kaedah unsur terhingga

ABSTRACT

Previous studies on the block iterative method focus mainly on the finite difference method. This paper presents the formulation and application of the 2,3 and 4 point Explicit Group (EG) iterative methods scheme on the finite element approximation equation to solve the ine dimensional diffusion problems. Finally, one numerical test was implemented to show the computational efficiency of the EG iterative method on the finite element.

Keywords: diffusion equations, Explicit Group method, finite element method

PENGENALAN

Perkembangan penemuan variasi kaedah lelaran blok dalam kaedah beza terhingga yang sangat menarik telah dapat memperbaiki dari segi bilangan dan masa lelaran yang diperlukan untuk mencapai penumpuan lelaran.

Tambahan pula, kajian kaedah lelaran blok yang diterapkan dalam persamaan penghampiran unsur terhingga bagi masalah nilai sempadan dua titik telah dibincangkan oleh Evans (1988). Dalam usaha mengaplikasikan skema variasi kaedah lelaran blok yang dirumuskan oleh Yousif (1984), Arsmah (1993), Jumaat dan Abdul Rahman (1998) serta Jumaat et al. (1998), maka makalah ini cuba memperlihatkan kecekapan penerapan kaedah lelaran tersebut ke atas sistem persamaan linear yang dijanakan oleh persamaan penghampiran unsur terhingga bagi masalah resapan satu matra. Walau bagaimanapun perumusan persamaan penghampiran tersebut hanya dibincangkan pada saiz subselang yang seragam.

Dalam makalah ini, perbincangan perumusan persamaan penghampiran unsur terhingga ke atas masalah resapan satu matra hanya dihadkan kepada kaedah reja Galerkin ke atas pendiskretan ruang. Sementara kaedah beza terhingga iaitu kaedah Crank-Nicolson (C-N) pula digunakan untuk pendiskretan masa. Pertimbangkan persamaan resapan satu matra yang ditakrifkan sebagai

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \le x \le L, \quad 0 \le t \le T \tag{1}$$

dengan tertakluk pada syarat awal

$$U(x,0) = g_1(x), \qquad 0 \le x \le L$$

syarat sempadan

$$U(0,t) = g_2(t)$$
$$U(L,t) = g_3(t) \qquad 0 \le t \le T$$

Sebelum membincangkan lebih lanjut tentang perumusan persamaan penghampiran unsur terhingga bagi masalah (1), selang [0,L] perlu dipartisikan kepada beberapa subselang untuk membentuk beberapa segmen unsur terhingga seperti yang ditunjukkan pada Rajah 1. Andaikan $U(x,t)$ dihampiri oleh fungsi bentuk linear yang ditakrifkan sebagai

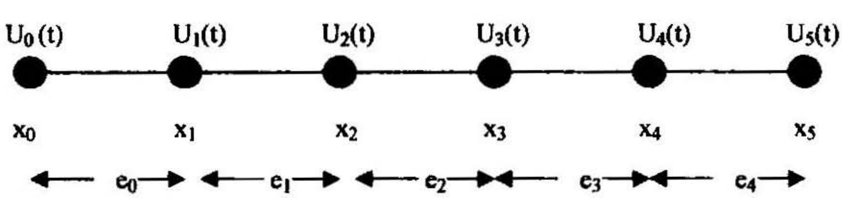
$$U(x,t) = \alpha + \beta x \tag{2}$$

dengan α dan β parameter yang tidak diketahui. Dengan menumpukan perhatian pada unsur linear ke i, dapat ditunjukkan

$$U(x, t) = N_i(x)U_i(t) + N_{i+1}(x)U_{i+1}(t) \tag{3}$$

yang,

$$N_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)}{h}, \qquad N_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)}{h}$$
$$h = x_{i+1} - x_i$$



RAJAH 1. Bilangan unsur e_i pada domain penyelesaian $m=5$ bagi sebarang paras masa t.

Langkah seterusnya cuba merumuskan sistem persamaan penghampiran unsur terhingga ke atas unsur ke i menerusi kaedah reja Galerkin yang boleh dinyatakan sebagai

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_k(x)E(x,t)dx = 0 \tag{4}$$

dengan $E(x,t) = \frac{\partial U}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ fungsi reja.

Dengan melakukan pendiskretan masa dalam (1) menggunakan kaedah beza terhingga, didapati

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x,t_{j+1}) - U(x,t_j)}{\Delta t} \tag{5}$$

Dengan menggunakan persamaan (3), persamaan di atas boleh diungkapkan semula dalam bentuk berikut

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\left(N_i(x)\left(U_{i,j+1} - U_{i,j}\right) + N_{i+1}(x)\left(U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j}\right)\right) \tag{6}$$

Dari persamaan (4) dan (6), boleh ditunjukkan

$$\begin{aligned}&\left(\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta t}\right)\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_k(x)N_i(x)dx + \left(\frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j}}{\Delta t}\right)\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_k(x)N_{i+1}\\ &(x)dx - \alpha\left(N_k(x_{i+1})\frac{\partial}{\partial x}\left(U(x_{i+1},t)\right) - N_k(x_i)\frac{\partial}{\partial x}\left(U(x_i,t)\right)\right) +\\ &\alpha h\left(\frac{\partial N_k}{\partial x}\right)\left(-U_i(t) + U_{i+1}(t)\right) = 0, \qquad k = i, \qquad i+1\end{aligned} \tag{7}$$

Seterusnya diterapkan kaedah C-N ke atas persamaan (7) untuk mendapatkan sistem persamaan penghampiran unsur terhingga bagi unsur ke-i berikut:

$$\alpha h U_{xi,j+1} + aU_{i,j+1} + bU_{i+1,j+1} = -ahU_{xi,j} + cU_{i,j} + dU_{i+1,j} \tag{8}$$

$$-\alpha h U_{xi+1,j+1} + bU_{i,j+1} + aU_{i+1,j+1} = -\alpha h U_{xi+1,j} + dU_{i,j} + cU_{i+1,j} \tag{9}$$

dengan

$$\gamma = \frac{h}{6\Delta t}, a = 4\gamma h + \alpha, \quad b = 2\gamma h - \alpha$$
$$c = 4\gamma h + \alpha, \quad d = 2\gamma h + \alpha$$

Pertimbangkan sistem persamaan di atas bagi semua unsur terhingga dalam domain penyelesaian pada paras masa $t = t$ yang menjanakan sistem persamaan linear tiga penjuru seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} \alpha h & b & & & & & & \\ 0 & 2a & b & & & & & \\ & b & 2a & b & & & & \\ & & b & 2a & b & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & b & 2a & b & & \\ & & & & b & 2a & 0 & \\ & & & & & b & -\alpha h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{x0,j+1} \\ U_{1,j+1} \\ U_{2,j+1} \\ U_{3,j+1} \\ \vdots \\ U_{n-1,j+1} \\ U_{n,j+1} \\ U_{xn+1,j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 - aU_{0,j+1} \\ f_1 - bU_{0,j+1} \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bU_{n+1,j+1} \\ f_{n+1} - aU_{n+1,j+1} \end{bmatrix} \tag{10}$$

dengan

$$f_0 = -\alpha h U_{x0,j} + cU_{0,j} + dU_{1,j}$$

$$f_1 = dhU_{i-1,j} + 2cU_{i,j} + dU_{i+1,j}, i = 1,2,\ldots,n$$

$$f_{n+1} = \alpha h U_{xn+1,j} + dU_{n,j} + cU_{n+1,j}$$

KAEDAH LELARAN KUMPULAN TAK TERSIRAT

Dalam usaha menerapkan kaedah lelaran Kumpulan Tak Tersirat (KTT) ke atas sistem persamaan (10), perlu diungkapkan semula sistem persamaan tersebut dalam bentuk berikut:

$$\alpha h U_{x0,j+1} + aU_{0,j+1} + bU_{1+j+1=f_0} \tag{11}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} 2a & b & & & & & & \\ b & 2a & b & & & & & \\ \hdashline & b & 2a & b & & & & \\ & & b & 2a & b & & & \\ \hdashline & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \hdashline & & & & & b & 2a & b \\ & & & & & & b & 2a \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \hdashline u_{3,j+1} \\ u_{4,j+1} \\ \hdashline \vdots \\ \vdots \\ \hdashline u_{n-1,j+1} \\ u_{n,j+1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} f_1 - bU_{0,j+1} \\ f_2 \\ \hdashline f_3 \\ f_4 \\ \hdashline \vdots \\ \vdots \\ \hdashline f_{n-1} \\ f_1 - bU_{n+1,j+1} \end{array}\right] \tag{12}$$

$$\alpha h U_{xn+1,j+1} + bU_{n,j+1} + aU_{n+1,j+1=f_{n+1}} \tag{13}$$

Dalam bahagian seterusnya, ditunjukkan perumusan skema kaedah lelaran blok yang berkonsepkan sekumpulan titik dan kemudiannya diselesaikan secara serentak pada satu masa. Walau bagaimanapun perbincangan dalam makalah ini hanya dihadkan kepada perumusan skema kaedah lelaran 2,3 dan 4 Titik-KTT ke atas sistem persamaan (12) yang seanalog dengan pembangunan kaedah lelaran KTT yang telah dilakukan oleh Yousif (1993), Jumat dan Abdul Rahman (1998) dan Jumat et al. (1998).

PERUMUSAN 2 TITIK-KTT

Dengan memanipulasi matriks pekali bagi sistem persamaan (12), beberapa sistem persamaan baru dapat dibentuk yang bergantung kepada blok titik yang dikehendaki. Misalnya pertimbangkan sebarang sekumpulan 2 titik berturutan bagi persamaan (12) yang menghasilkan sistem persamaan linear (2 2). Perumusan kaedah lelaran 2 Titik-KTT membabitkan sistem persamaan tersebut secara umumnya dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

dengan

$$S_l = f_i - bU_{i-l,j+l}$$
$$S_2 = f_{i+l} - bU_{i+2,j+l}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (14), skema lelaran 2 Titik-KTT dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{4a^2 - b^2} \begin{bmatrix} 2a & -b \\ -b & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

PERUMUSAN 3 TITIK-KTT

Pertimbangkan pula lebih daripada 2 titik, iaitu 3 titik berturutan ke atas sistem persamaan (12) yang boleh dituliskan sebagai sistem persamaan linear (3 × 3)

$$\begin{bmatrix} 2a & b & \\ b & 2a & b \\ & b & 2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i+2,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

dengan

$$S_1 = f_i - bU_{i-1,j+1}$$
$$S_2 = f_{i+1}$$
$$S_3 = f_{i+2} - bU_{i-3,j+1}$$

Dengan menggunakan teknik pengurangan kekompleksan pengiraan yang telah dibincangkan oleh Jumat et al. (1998) ka atae sistem persamaan (16), boleh dinyatakan skema lelaran 3 Titik-KTT sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i+2,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\upsilon_0} \begin{bmatrix} bP_a + b_0S_1 \\ b_0P_a \\ bP_a + b_0S_3 \end{bmatrix}$$

dengan

$$SS = 2a^2 - b^2$$

$$\upsilon_0 = 4aSS, \quad a_0 = -2a, \quad b_0 = 2SS,$$

$$P_a = b(S_1 + S_3) + a_0S_2$$

PERUMUSAN 4 TITIK-KTT

Melalui langkah yang serupa dan penerapan teknik kekompleksan bagi pembangunan skema lelaran 2 dan 3 telah dibincangkan, maka boleh ditunjukkan juga skema lelε sebagai

$$\begin{bmatrix} U_{i,j+1} \\ U_{i+1,j+1} \\ U_{i+2,j+1} \\ U_{i+3,j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\upsilon_0} \begin{bmatrix} S_aS_1 - bP_a \\ S_bS_1 + a_4P_a \\ S_bS_4 + a_4P_b \\ S_aS_4 - bP_b \end{bmatrix}$$

dengan

$$S_1 = f_i - bU_{i-1,j+1}, \quad S_2 = f_{i+1}, \quad S_3 = f_{i+2}, \quad S_4 = f_{i+3} - b$$

$$a_1 = a^2, \quad a_2 = b^2, \quad a_3 = 2ab, \quad a_4 = 2a,$$

$$SS = 2a_1 - a_2, \quad St = 4a_1 - a_2, \quad S_a = 4aSS, \quad S_b = -bSt,$$

$$\upsilon_0 = 8a_1SS - a_2St, \quad P_a = StS_2 - a_3S_3 + a_2S_4, \quad P_b = a_2S_1 -$$

UJIAN BERANGKA

Dalam usaha untu memperihalkan kecekapan bebepara skema KTT ke atas kaedah unsur teringga, satu ujikaji berang dilaksanakan bagi persamaan resapan satu matra

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad 0 \le x \le 2, \ 0 \le t \le 0.1$$

tertakluk kepada syarat awal

$$U(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \qquad 0 \le x \le 2$$

dan syarat sempadan

$$U(0,t) = 0$$

$$U(2,t) = 0 \qquad 0 \le t \le 0.1$$

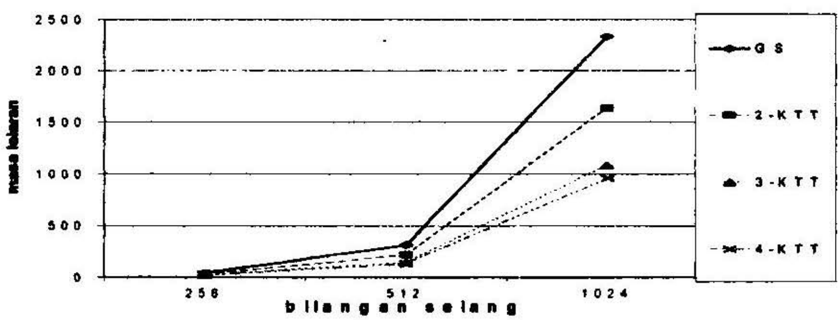
Penyelesaian hampiran yang diperolehi pula dibandingkan dengan penyelesaian tepat bagi masalah (19) yang diberikan sebagai

$$U(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi^2}{4}t\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad 0 \le x \le 2, 0 \le t \le 0.1, \tag{20}$$

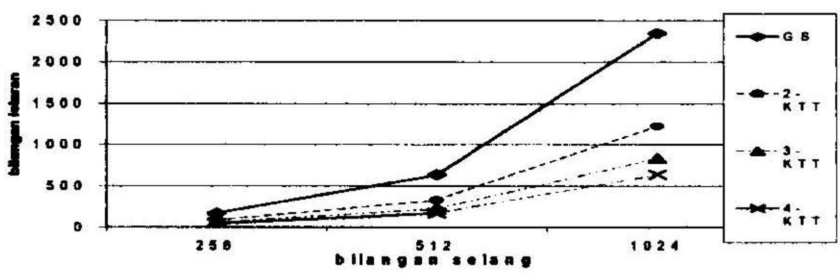
Dalam pelaksanaan ujikaji berangka bagi setiap kaedah lelaran, pengiraan nilai U pada peringkat lelaran ke-(k+1) yang ditandakan $U_{i,j}^{(k+1)}$ dikatakan menumpu jika

$$\left|U_{i,j}^{(k+1)} - U_{i,j}^{(k)}\right| < \varepsilon$$

bagi setiap i, j dengan nilai ralat toleransi ditetapkan $\varepsilon = 10^{-10}$. Semua keputusan berangka yang diperolehi dinyatakan dalam Rajah 2 dan 3 serta Jadual 1. Perhatikan Rajah 2, 3 dan Jadual 1, kaedah lelaran Gauss-Siedel digunakan sebagai kaedah lelaran piawai yang bertindak sebagai perbandingan ke atas kaedah lelaran KTT.



RAJAH 2. Perbandingan bilangan lelaran bagi kaedah-kaedah lelaran yang diperlukan untuk mencapai penumpuan



RAJAH 3. Perbandingan masa lelaran (dalamm unit saat) bagi kaedah-kaedah lelaran yang diperlukan untuk mencapai penumpuan

JADUAL 1. Perbandingan maksimum ralat mutlak bagi perbezaan antara penyelesaian tepat dengan hampiran bagi kaedah-kaedah lelaran

Kaedah	Bilangan selang		
	m = 256	m = 512	m = 1024
2-KTT	4.0167×10^{-6}	1.3511×10^{-6}	1.3203×10^{-6}
3-KTT	3.9896×10^{-6}	1.2571×10^{-6}	9.8810×10^{-7}
4-KTT	3.9765×10^{-6}	1.2123×10^{-6}	8.3206×10^{-7}

KESIMPULAN

Hasil uji kaji didapati bahawa penerapan kaedah lelaran jauh lebih baik dari segi bilangan dan masa lelaran yang diperlukan untuk mencapai penumpuan berbanding dengan kaedah lelaran Gauss-Siedel. Misalnya bilangan dan masa lelaran bagi kaedah lelaran 2 Titik-KTT pada bilangan selang m = 1024 masing-masing berkurang sebanyak 47.92% dan 29.94% berbanding dengan kaedah lelaran Gauss-Siedel. Sementara itu, bilangan lelaran bagi kaedah lelaran 4 Titik-KTT pula adalah masing-masing berkurang sebanyak 47.76% dan 23.54% jika dibandingkan dengan kaedah lelaran 2 dan 3 Titik-KTT.

Walau bagaimanapun masa lelaran bagi kaedah lelaran 3 dan 4 Titik KTT adalah tidak terlalu jauh berbeza, iaitu sebanyak 11.50%. Hal ini disebabkan kekompleksan pengiraan tinggi berpunca daripada matrik songsangan (4 4) penuh yang terbentuk dalam skema lelaran 4 Titik-KTT, meskipun teknik pengurangan kekompleksan telah diterapkan. Secara keseluruhannya bilangan dan masa lelaran bagi kaedah lelaran 4 Titik-KTT adalah lebih baik dan diikuti pula oleh keadaan lelaran 3 Titik-KTT, 2 Titik-KTT dan Gauss-Siedel. Keputusan ini adalah relatif dengan keputusan penerapan kaedah beza terhingga bagi masalah yang sama (Jumat & Abdul Rahman 1998).

SENARAI SIMBOL

h	jarak subselang ruang
Δt	jarak subselang masa
e_i	unsur ke $-i$
$U_i(t)$	nilai hampiran pada $U(x_i,t)$
$U_{i,j}$	nilai hampiran pada $U(x_i,t_j)$
$U_{x\,i,j}$	nilai hampiran pada $\frac{\partial}{\partial x}\left(U(x_i,t_j)\right)$

RUJUKAN

Arsmah Ibrahim. 1993. Tesis Doktor Falsafah, Universiti Kebangsaan Malaysia.

Evan, D.J. 1988. The AGE Galerkin method for solving two-point boundary value problems. Comput. *Math. Applic.* 16(12): 1045-1055.

Jumat Bin Sulaiman & Abdul Rahman Bin Abdullah. 1998. Kaedah lelaran kumpulan tak tersirat dengan penghampiran beza terhingga peringkat tinggi bagi persamaan Poisson. *Matematika* 14: 27-37.

Jumat Sulaiman, Mohamed Othman & Abdul Rahman Abdullah. 1998. Skema kaedah lelaran kumpulan tak tersirat terubahsuai bagi persamaaan resapan satu matra. *Borneo Science* 4: 57-66.

Yuosif, W.S. 1984. New Block Interative Methods For The Numerical Solution of Boundary Value Problem. Ph.D Thesis, Loughborough University of Technology.

Jumat Sulaiman
Program Matematik Dengan Ekonomi
Sekolah Sains & Teknologi
Universiti Malaysia Sabah
Beg Berkunci 2073
88999 Kota Kinabalu
Sabah

Abdul Rahman Abdullah
Jabatan Komputeran Industri
Fakulti Teknologi & Sains Maklumat
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi
Selangor D.E.