Journal of Quality Measurement and Analysis *JQMA* 15(2) 2019, 77-84
e-ISSN: 2600-8602 *http://www.ukm.my/jqma/*

KELAS FUNGSI ANALISIS $B(\alpha, \beta)$ DAN BEBERAPA SIFATNYA

(A Class $B(\alpha, \beta)$ of Analytic Functions and Some of Its Properties)

WONG GUAN LOUK & MASLINA DARUS*

ABSTRAK

Dalam makalah ini, kelas fungsi analisis $B(\alpha,\beta)$ diperkenalkan dan beberapa sifat tertentu diperoleh. Syarat tertentu bagi kelas fungsi bakbintang kuat dan cembung kuat peringkat α dalam cakera unit juga diberi**.**

Kata kunci: fungsi analisis; fungsi bakbintang; fungsi cembung

ABSTRACT

In this article, the class of analytic functions $B(\alpha,\beta)$ is introduced and some specific properties are obtained. Certain conditions for the strongly starlike and strongly convex of order α in the unit disc are also given

Keywords: analytic functions; starlike functions; convex functions

1. Pengenalan

Andaikan $\boldsymbol{A}$ kelas fungsi berbentuk

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n , \tag{1}$$

Yang analisis dalam cakera unit terbuka $D = \{z: |z| < 1\}$.

Fungsi $f(z)$ yang terkandung dalam $\boldsymbol{A}$ dikatakan bakbintang peringkat α sekiranya fungsi tersebut memenuhi

$$Ny\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in D), \tag{2}$$

untuk beberapa α $(0 \leq \alpha < 1)$. Andaikan S_α^* subkelas $\boldsymbol{A}$ yang mengandungi fungsi bakbintang peringkat α dalam *D.*

Fungsi $f(z)$ yang terkandung dalam $\boldsymbol{A}$ dikatakan cembung peringkat α sekiranya fungsi tersebut memenuhi

$$Ny\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in D) \tag{3}$$

bagi beberapa α $(0 \leq \alpha < 1)$. Dilambangkan C_α sebagai subkelas $\boldsymbol{A}$ yang mengandungi fungsi cembung peringkat α dalam *D.*

Jika $f(z) \in \boldsymbol{A}$ memenuhi

$$\left|huj\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z \in D), \tag{4}$$

bagi beberapa α $(0 \leq \alpha < 1)$, maka $f(z)$ dikatakan bakbintang kuat peringkat α dalam *D*, dan kelas ini dilambangkan dengan $\bar{S}_{\alpha}^{*}$.

Jika$f(z) \in \boldsymbol{A}$ memenuhi

$$\left| huj\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z \in D), \tag{5}$$

bagi beberapa α $(0 \leq \alpha < 1)$, maka $f(z)$ dikatakan cembung kuat peringkat α dalam *D*, dan kelas ini dilambangkan dengan $\bar{C}_{\alpha}$.

Objektif kajian ini adalah untuk mendapatkan beberapa sifat kelas fungsi analisis yang ditakrif seperti berikut.

Takrif 1.1. Fungsi $f(z) \in \boldsymbol{A}$ dikatakan ahli kepada kelas $B(\alpha, \beta)$ jika dan hanya jika

$$\left|\frac{z^{2+\beta}f'(z)}{f^{2+\beta}(z)} - 1\right| < 1 - \alpha\,, \tag{6}$$

bagi beberapa α $(0 \leq \alpha < 1)$, $\beta \geq -2$ dan $z \in D$.

Ketaksamaan (6) mengimplikasikan

$$Ny\left(\frac{z^{2+\beta}f\prime(z)}{f^{2+\beta}(z)}\right) > \alpha. \tag{7}$$

2. Hasil Utama

Untuk mendapatkan hasil utama, dinyatakan lema-lema yang diperlukan seperti berikut:

LEMA 2.1. (Frasin & Darus 2001). *Jika* $f(z) \in \boldsymbol{A}$ *memenuhi syarat berikut*

$$\left|\frac{z^{2+\beta}f'(z)}{f^{2+\beta}(z)} - 1\right| < 1 \qquad (z \in D),\;\; \beta \geq -2, \tag{8}$$

maka f *adalah univalen dalam D.*

Nota: Untuk Lema 2.1, ia berdasarkan hasil daripada Frasin dan Darus (2001) yang merujuk kepada lema yang diberi oleh Nunokawa (1995) untuk $\beta = 0$.

LEMA 2.2. (Jack 1971). *Andaikan* $w(z)$ *fungsi analisis dalam D dan* $w(0) = 0$. *Jika* $|w(z)|$ *memperoleh nilai maksimum dalam cakera* $|z| = r < 1$ *pada titik* $z_o \in D$, *maka*

$$z_o w'(z_o) = kw(z_o)\,, \tag{9}$$

yang $k \geq 1$ *dan k adalah nombor nyata.*

LEMA 2.3. (Ozaki & Nunokawa 1972). *Andaikan* $p(z)$ *fungsi analisis dalam D,* $p(0) = 1$, *dan* $p(z) \neq 0$ $(z \in D)$. *Sekiranya wujud satu titik* $z_o \in D$ *supaya*

$$|huj(p(z))| < \frac{\pi}{2}\alpha, \text{ bagi } |z| < |z_o|, \qquad |huj(p(z_o))| = \frac{\pi}{2}\alpha, \tag{10}$$

dengan $0 < \alpha \leq 1$, *maka diperoleh*

$$\frac{z_o p'(z_o)}{p(z_o)} = ik\alpha\,, \tag{11}$$

yang

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 1 \;\; apabila \;\; huj\big(p(z_o)\big) = \frac{\pi}{2}\alpha, \\ k &\leq -\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \leq -1 \;\; apabila \;\; huj\big(p(z_o)\big) = -\frac{\pi}{2}\alpha, \end{aligned} \tag{12}$$

$$p(z_o)^{1/\alpha} = \pm ai, \;\; (a > 0).$$

Berikut adalah hasil pertama berkenaan dengan sifat fungsi $f \in B(\alpha, \beta)$.

TEOREM 2.4. *Jika* $f(z) \in \boldsymbol{A}$ *memenuhi*

$$\left|\frac{\left[z^{2+\beta}f'(z)\right]'}{z^{1+\beta}f'(z)} - (2+\beta)\frac{zf'^{(z)}}{f(z)}\right| < \frac{1-\alpha}{2-\alpha}(z \in D), \tag{13}$$

bagi beberapa$(0 \leq \alpha < 1)$, $\beta \geq -2$, *maka*$f(z) \in B(\alpha, \beta)$.

BUKTI. Wakilkan fungsi *w*(*z*) sebagai

$$\frac{z^{2+\beta}f'(z)}{f^{2+\beta}(z)} = 1 + (1-\alpha)w(z). \tag{14}$$

Maka, $w(z)$ adalah analisis dalam D dan $w(0) = 0$. Dengan kaedah pembezaan logaritma, dari (14) diperoleh persamaan berikut,

$$\frac{\left[z^{2+\beta}f'(z)\right]'}{z^{1+\beta}f'(z)} - (2+\beta)\frac{zf'^{(z)}}{f(z)} = \frac{(1-\alpha)zw'(z)}{1+(1-\alpha)w(z)}. \tag{15}$$

Andaikan wujud $z_o \in D$ supaya

$$\max_{|z|<|z_o|}|w(z)| = |w(z_o)| = 1, \tag{16}$$

maka dari Lema 2.2, persamaan (9) dipenuhi.

Andaikan $w(z_o) = e^{i\theta}$, ketaksamaan di bawah diperoleh daripada persamaan (15),

$$\left|\frac{\left[z_o{}^{2+\beta}f'(z_o)\right]'}{z_o{}^{1+\beta}f'(z_o)}-(2+\beta)\frac{z_of'(z_o)}{f(z_o)}\right|=\frac{(1-\alpha)ke^{i\theta}}{1+(1-\alpha)e^{i\theta}}\geq\frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \tag{17}$$

yang bercanggah dengan andaian (13). Oleh itu, $|\,w(z)|<1, z\in D$.

Akhirnya, diperoleh

$$\left|\frac{z^{2+\beta}f'(z)}{f^{2+\beta}(z)}-1\right|=|(1-\alpha)w(z)|<1-\alpha \quad (z\in D), \tag{18}$$

iaitu, $f(z)\in B(\alpha,\beta)$.□

Ambil $\beta=0$ dalam (13), diperoleh hasil Frasin dan Darus (2001).

TEOREM 2.5. *Katakan $f(z)\in \boldsymbol{A}$. Jika $f(z)\in B(\alpha,\beta)$, maka*

$$\left|huj\left(\frac{z^\beta}{f^\beta(z)}\right)\right|<\frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z\in D\ ), \tag{19}$$

bagi beberapa α $(0\leq\alpha<1)$, $\beta\geq 0$ dan $(2/\pi)\tan^{-1}(\alpha/\beta)+\alpha=1$.

BUKTI. Takrifkan fungsi $p(\mathrm{z})$ dengan

$$\frac{z^\beta}{f^\beta(z)}=\mathrm{p(z)}=\frac{1}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^{n-1}}. \tag{20}$$

Maka, $p(\mathrm{z})$ analisis dalam *D*, $p(0)=1$, dan $p(z)\neq 0$ $(z\in D)$. Dari (21), diperoleh

$$\frac{f^{\beta-1}(z)f'(z)}{z^{\beta-1}}=\frac{1}{p(z)}\left[1-\frac{1}{\beta}\frac{zp'(z)}{p(z)}\right]. \tag{21}$$

Andaikan wujud satu titik $z_o\in D$ supaya

$$|huj(p(z))|<\frac{\pi}{2}\alpha,\ \text{ bagi } |z|<|z_o|, \qquad |huj(p(z_o))|=\frac{\pi}{2}\alpha. \tag{22}$$

Dengan menggunakan Lema 2.3,

$$\frac{z_op'(z_o)}{p(z_o)}=ik\alpha\,, \tag{23}$$

yang

$$\begin{gathered}k\geq\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq 1 \text{ apabila } huj\big(p(z_o)\big)=\frac{\pi}{2}\alpha,\\ k\leq-\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\leq -1 \text{ apabila } huj\big(p(z_o)\big)=-\frac{\pi}{2}\alpha,\\ p(z_o)^{1/\alpha}=\pm ai,\ \ (a>0).\end{gathered} \tag{24}$$

Oleh itu, jika $huj\big(p(z_o)\big)=\frac{\pi\alpha}{2}$, maka $k\geq 1$ dan

$$\frac{f^{\beta-1}(z_0)f'(z_0)}{{z_0}^{\beta-1}} = \frac{1}{p(z_0)}\left[1-\frac{1}{\beta}\frac{zp'(z_0)}{p(z_0)}\right] = a^{-\alpha}e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{\beta}ik\alpha\right). \tag{25}$$

Ini menghasilkan

$$\begin{aligned} huj\left(\frac{f^{\beta-1}(z_0)f'(z_0)}{{z_0}^{\beta-1}}\right) &= huj\left(\frac{1}{p(z_0)}\left[1-\frac{1}{\beta}\frac{zp'(z_0)}{p(z_0)}\right]\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}\alpha + huj\left(1-\frac{1}{\beta}ik\alpha\right) \\ &\leq -\frac{\pi}{2}\alpha - \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\alpha\right) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{26}$$

jika

$$\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\alpha = 1. \tag{27}$$

Juga, jika $huj\big(p(z_o)\big) = -\pi\alpha/2$, maka $k \leq -1$ dan

$$\frac{f^{\beta-1}(z_0)f'(z_0)}{{z_0}^{\beta-1}} = \frac{1}{p(z_0)}\left[1-\frac{1}{\beta}\frac{zp'(z_0)}{p(z_0)}\right] = a^{\alpha}e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{\beta}ik\alpha\right). \tag{28}$$

Seterusnya menghasilkan

$$\begin{aligned} huj\left(\frac{f^{\beta-1}(z_0)f'(z_0)}{{z_0}^{\beta-1}}\right) &= huj\left(\frac{1}{p(z_0)}\left[1-\frac{1}{\beta}\frac{zp'^{(z_0)}}{p(z_0)}\right]\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\alpha + huj\left(1-\frac{1}{\beta}ik\alpha\right) \\ &\geq \frac{\pi}{2}\alpha + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\alpha\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{29}$$

jika

$$\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\alpha = 1. \tag{30}$$

Ini bercanggah dengan andaian teorem. Oleh itu, fungsi $p(\mathrm{z})$ perlu memenuhi

$$|huj(\mathrm{p(z)})| < \frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z \in D), \tag{31}$$

atau

$$\left|huj\left(\frac{z^{\beta}}{f^{\beta}(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z \in D), \tag{32}$$

dan pembuktian telah lengkap.□

Ambil $\beta = 1$ dalam (19), akan diperoleh korolari berikut:

KOROLARI 2.6. *Katakan* $f(z) \in \boldsymbol{A}$. *Jika* $f(z) \in B(\alpha, 1)$, *maka*

$$\left|huj\left(\frac{z}{f(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \qquad (z \in D\ ), \tag{33}$$

bagi beberapa α $(0 \leq \alpha < 1)$ *dan* $(2/\pi)\tan^{-1}\alpha + \alpha = 1$.

TEOREM 2.7. *Katakan* $p(\mathrm{z})$ *fungsi analisis dalam D*, $p(z) \neq 0$ *dalam D dan andaikan*

$$\left|huj\left(p(z) + \frac{z^{3+\beta} f'(z)}{f^{2+\beta}(z)} p'(z)\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in D), \tag{34}$$

yang $0 < \alpha < 1,\ \beta \geq -2$ *dan* $f(z) \in B(\alpha, \beta)$, *maka diperoleh*

$$\left|huj\big(p(z)\big)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in D). \tag{35}$$

BUKTI. Andaikan wujud satu titik $z_o \in D$ sedemikian hingga

$$|huj(p(z))| < \frac{\pi}{2}\alpha, \ \text{ bagi } |z| < |z_o|, \qquad |huj(p(z_o))| = \frac{\pi}{2}\alpha, \tag{36}$$

maka, dengan menggunakan Lema 2.3, diperoleh

$$\frac{z_o p'(z_o)}{p(z_o)} = ik\alpha\ , \tag{37}$$

yang

$$\begin{gathered} k \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 1 \ \text{ apabila } \ huj\big(p(z_o)\big) = \frac{\pi}{2}\alpha, \\ k \leq -\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \leq -1 \ \text{ apabila } \ huj\big(p(z_o)\big) = -\frac{\pi}{2}\alpha, \\ p(z_o)^{1/\alpha} = \pm ai, \ \ (a > 0). \end{gathered} \tag{38}$$

Seterusnya, daripada (36), boleh ditulis sebagai

$$\begin{aligned} huj\left(p(z_o) + \frac{{z_o}^{3+\beta} f'^{(z_o)}}{f^{2+\beta}(z_o)} p'^{(z_o)}\right) &= huj\left(p(z_o)\left(1 + \frac{{z_o}^{2+\beta} f'^{(z_o)}}{f^{2+\beta}(z_o)} \frac{z_o p'^{(z_o)}}{p(z_o)}\right)\right) \\ &= huj\left(p(z_o)\left(1 + i\frac{{z_o}^{2+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)}\alpha k\right)\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Jika $huj(p(z_o\ )) = \pi\alpha/2$, maka $k \geq 1$ dan didapati

$$huj\left(p(z_o) + \frac{{z_o}^{3+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)} p'(z_o)\right) = huj\big(p(z_o)\big) + huj\left(1 + i\frac{{z_o}^{2+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)}\alpha k\right) > \frac{\pi}{2}\alpha, \tag{40}$$

kerana

$$Ny\left(\frac{{z_o}^{2+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)}\alpha k\right) > 0 \text{ dan oleh itu } huj\left(1 + i\frac{{z_o}^{2+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)}\alpha k\right) > 0 \tag{41}$$

Begitu juga, jika $huj\big(p(z_o)\big) = -\pi\alpha/2$, maka $k \le -1$ dan didapati

$$huj\left(p(z_o) + \frac{{z_o}^{3+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)} p'(z_o)\right) = huj\big(p(z_o)\big) + huj\left(1 + i\frac{{z_o}^{2+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)}\alpha k\right) < -\frac{\pi}{2}\alpha, \tag{42}$$

kerana

$$Ny\left(\frac{{z_o}^{2+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)}\alpha k\right) < 0 \text{ dan oleh itu } huj\left(1 + i\frac{{z_o}^{2+\beta} f'(z_o)}{f^{2+\beta}(z_o)}\alpha k\right) < 0. \tag{43}$$

Oleh yang demikian, agak jelas bahawa (40) dan (42) bercanggah dengan syarat (34). Jadi, kesimpulannya

$$\big|huj\big(p(z)\big)\big| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in D). \tag{44}$$

Dengan mengambil $\beta = 0$ dalam (34), diperoleh hasil Frasin dan Darus (2001).

KOROLARI 2.8. *Katakan* p(z) *fungsi analisis dalam D*, $p(z) \neq 0$ *dalam D dan andaikan*

$$\left|huj\left(p(z) + \frac{z^3 f'(z)}{f^2(z)} p'(z)\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in D), \tag{45}$$

yang $0 < \alpha < 1$ *dan* $f(z) \in B(\alpha, 0)$, *maka*

$$\big|huj\big(p(z)\big)\big| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in D). \tag{46}$$

Dengan mengambil $p(z) = zf'(z)/f(z)$ dalam Teorem 2.7, diperoleh hasil berikut:

KOROLARI 2.9. *Jika* $f(z) \in \boldsymbol{A}$ *memenuhi*

$$\left|huj\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{z^{3+\beta} f'(z)}{f^{3+\beta}(z)}\left(\big(zf'(z)\big)' - \frac{z(f'(z))^2}{f(z)}\right)\right)\right| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in D), \tag{47}$$

yang $0 < \alpha < 1$, $\beta \ge -2$ *dan* $f(z) \in B(\alpha, \beta)$, *maka* $f(z) \in \bar{S}^*_\alpha$.

Dengan mengambil $p(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ dalam Teorem 2.7, dapat diperoleh yang berikut:

KOROLARI 2.10. *Jika* $f(z) \in \boldsymbol{A}$ *memenuhi*

$$\left| huj \left(\frac{\left(zf'(z)\right)'}{f'(z)} + \frac{z^{3+\beta}}{f^{2+\beta}(z)f'(z)} \left(\left(zf''(z)\right)' - z(f''(z))^2 \right) \right) \right| < \frac{\pi}{2}\alpha \quad (z \in D), \qquad (48)$$

yang $0 < \alpha < 1,\ \beta \geq -2$ *dan* $f(z) \in B(\alpha)$, *maka* $f(z) \in \bar{C}_\alpha$.

3. Kesimpulan

Dalam makalah ini dibincangkan beberapa sifat tertentu bagi kelas fungsi analisis teritlak peringkat α. Beberapa pengitlakan lain masih boleh dilakukan untuk kelas-kelas yang berbeza.

Penghargaan

Makalah ini adalah sebahagian daripada hasil kerja Latihan Industri penama pertama, manakala penama kedua adalah pembimbing semasa latihan dijalankan**.**

Rujukan

Frasin B.A. & Darus M. 2001. On certain analytic univalent functions. *Int. J. Math. Sci.* **25**(5): 305-310.
Jack I.S. 1971. Functions starlike and convex of order α. *J. London Math. Soc*. **2**(3): 469-474.
Nunokawa M. 1995. On some angular estimates of analytic functions. *Math. Japon*. **41**(2): 447-452.
Ozaki S. & Nunokawa M. 1972. The Schwarzian derivative and univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **33**: 392-394.

Mathematics Department
Faculty of Science
Universiti Teknologi Malaysia
81310 Johor Bahru
Johor DT, MALAYSIA
Mel-e: xguanle@gmail.com

Department of Mathematical Sciences
Faculty of Science and Technology
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi
Selangor DE, MALAYSIA
*Mel-e: maslina@ukm.edu.my**

*Corresponding author