Journal of Quality Measurement and Analysis *JQMA* 18(3) 2022, 83-93
e-ISSN: 2600-8602 *http://www.ukm.my/jqma*

SIFAT PEMBAYANGAN SECARA AKHIRNYA PADA SET RANTAIAN BERULANG JENIS-k UNTUK SUATU TINDAKAN-$\mathbb{Z}^d$

(The Eventually Shadowing Property On k -type Chain Recurrent Set for a $\mathbb{Z}^d$ -action)

NOR SYAHMINA KAMARUDIN & SYAHIDA CHE DZUL-KIFLI*

ABSTRAK

Pemerhatian terhadap kajian lepas telah mencetuskan satu ilham menarik untuk mentakrifkan satu konsep sifat pembayangan secara khusus untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ yang dikenali sebagai sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian. Dengan tertumpu kepada kajian terhadap tindakan-$\mathbb{Z}^d$ yang merupakan suatu pemetaan $T:\mathbb{Z}^d \times X \to X$ pada suatu ruang metrik padat (X,ρ), kajian ini memerhatikan dua jenis set dengan ciri-ciri yang tertentu iaitu set titik-titik tidak merayau jenis-k, $\Omega^k(T)$ dan set rantaian berulang jenis-k, $CR^k(T)$. Beberapa hubungan tertentu telah dihuraikan dan dibuktikan terlebih dahulu untuk mendekati tujuan utama kajian ini iaitu membuktikan bahawa $\Omega^k(T)=CR^k(T)$ jika pemetaan T tersebut mempunyai sifat pembayangan secara akhirnya pada set $CR^k(T)$. Seterusnya, kajian ini meringkaskan perbandingan antara penemuan hasil di atas bagi tindakan-$\mathbb{Z}^d$ dengan penemuan hubungan implikasi yang sama bagi kasus homeomorfisma yang pernah dibincangkan pada beberapa makalah kajian lepas.

Kata kunci: sifat pembayangan secara akhirnya; set titik-titik tidak merayau jenis-k; set rantaian berulang jenis-k

ABSTRACT

An observation of the past study has triggered an interesting idea to define a concept of shadowing property specifically for a $\mathbb{Z}^d$ -action which known as eventually shadowing property on an invariant subset. By focusing on the study of the $\mathbb{Z}^d$ -action which is a map $T:\mathbb{Z}^d \times X \to X$ on a compact metric space (X,ρ), this study observes the two type of sets with certain characteristics which are the set of k -type nonwandering points, $\Omega^k(T)$ and the k -type chain recurrent set, $CR^k(T)$. Some certain relationships have been described and proven first in order to approach the main purpose of this study which is to prove that $\Omega^k(T)=CR^k(T)$ if the map T has the eventually shadowing property on the set $CR^k(T)$. Next, this study summarizes the comparison between the discovery of the above result for the $\mathbb{Z}^d$ -action with the findings of the similar implication relationships for the case of homeomorphism that has been discussed according to several past research papers.

Keywords: eventually shadowing property; set of k -type nonwandering points; k -type chain recurrent set

1. Pengenalan

Teori mengenai sifat pembayangan merupakan salah satu topik yang penting dan sering dibincangkan dalam kajian kualitatif bagi sistem dinamik diskrit. Sifat pembayangan telah diperkenalkan bagi beberapa pemetaan tertentu seperti homeomorfisma, pemetaan selanjar dan sebagainya. Pengenalan sifat pembayangan untuk homeomorfisma boleh dirujuk dalam Pilyugin (1999). Manakala sifat pembayangan untuk pemetaan selanjar telah dihuraikan oleh Good dan Meddaugh (2018). Sifat pembayangan juga diperkenalkan untuk tindakan kumpulan yang telah dilakukan oleh Chung dan Lee (2018). Perbincangan mengenai sifat pembayangan adalah sangat meluas dan salah satu tumpuannya adalah untuk menghuraikan kestabilan secara topologi bagi suatu sistem dinamik (Walters 1970; 1978; Chung & Lee 2018; Lee & Morales 2017).

Tindakan- $\mathbb{Z}^d$ merupakan suatu pemetaan yang diperkenalkan secara khusus dalam pembentukan suatu sistem dinamik diskrit yang berbilang matra. Antara perkara lazim yang sering diberi perhatian dalam kajian terhadap sistem dinamik diskrit yang berbilang matra adalah untuk membandingkan kelakuan sistem tersebut dengan tingkah laku sistem dinamik diskrit klasik yang telah banyak diterokai. Beberapa istilah tertentu telah diperkenalkan secara khusus untuk tindakan-$\mathbb{Z}^d$ mengikut kesesuaian fitrahnya seperti sifat-sifat kekalutan yang dibincangkan oleh Shah dan Das (2015a; 2015b) serta Kamarudin dan Dzul-Kifli (2020; 2021). Sifat pembayangan telah diperkenalkan untuk tindakan-$\mathbb{Z}^d$ dalam kajian Oprocha (2008) yang membincangkan tentang teorem penguraian spektrum bagi tindakan- $\mathbb{Z}^d$. Manakala Kim dan Lee (2014) telah menjalankan kajian yang tertumpu kepada tindakan-$\mathbb{Z}^2$ dan mereka menerokai sifat pembayangan bagi tindakan- $\mathbb{Z}^2$ yang berperanan dalam huraian teorem penguraian spektrum secara khusus untuk sistem dinamik diskrit yang bermatra dua. Justeru, sifat pembayangan untuk tindakan-$\mathbb{Z}^d$ dapat dijadikan sebagai salah satu topik yang penting untuk diterokai.

Selain itu, terdapat beberapa jenis konsep sifat pembayangan lain yang telah diperkenalkan dalam kajian-kajian lepas seperti pembayangan lemah, pembayangan terhingga, pembayangan orbital, pembayangan berkala dan pembayangan secara akhirnya. Kajian mengenai sifat pembayangan lemah boleh dilihat dalam Mazur (2003) yang telah menunjukkan bahawa sifat pembayangan lemah adalah suatu sifat generik dalam set kesemua homeomorfisma pada ruang metrik padat. Manakala huraian sifat pembayangan terhingga boleh dirujuk dalam Pilyugin (1999) yang merumuskan beberapa hasil kajian mengenainya termasuk mengesahkan bahawa sifat pembayangan terhingga adalah setara dengan sifat pembayangan untuk homeomorfisma pada ruang metrik padat. Kajian Darji *et al*. (2021) juga mendapati sifat pembayangan terhingga adalah setara dengan sifat pembayangan bagi pemetaan selanjar yang dipertimbangkan pada suatu ruang padat yang tak berkait keseluruhannya.

Seterusnya, sifat pembayangan orbital telah diperkenalkan oleh Pilyugin *et al*. (2003) yang memerhatikan perbandingan antara sifat tersebut dengan sifat pembayangan lemah serta hubungan kedua-dua sifat tersebut terhadap beberapa ciri kestabilan seperti kestabilan berstruktur dan kestabilan-Ω. Koscielniak dan Mazur (2007) juga mengkaji tentang sifat pembayangan orbital dan telah menghuraikan bahawa sifat pembayangan orbital adalah suatu sifat generik dalam set kesemua homeomorfisma pada ruang metrik padat. Manakala Good dan Meddaugh (2018) telah mentakrifkan sifat pembayangan orbital bagi suatu pemetaan selanjar dan mengkaji hubungan sifat tersebut terhadap kesetaraan antara dua set yang mempunyai ciri-ciri topologi tertentu.

Kemudian, Koscielniak (2005) telah memperkenalkan sifat pembayangan berkala dan juga menghuraikan bahawa sifat tersebut merupakan suatu sifat generik dalam set kesemua homeomorfisma pada ruang metrik padat. Manakala Darabi dan Forouzanfar (2017) telah mempertimbangkan sifat pembayangan berkala untuk pemetaan selanjar dan menunjukkan bahawa sifat pembayangan mengimplikasikan kepada sifat pembayangan berkala bagi pemetaan selanjar yang dilengkapi dengan ciri kembangan. Kepelbagaian jenis konsep sifat pembayangan yang telah dinyatakan di atas menunjukkan bahawa kajian mengenai sifat pembayangan merupakan satu topik yang sangat luas. Disamping itu, terdapat banyak lagi jenis konsep sifat pembayangan lain yang boleh diketahui selain daripada yang telah disenaraikan seperti sifat pembayangan purata (Kwietniak & Oprocha 2012), sifat pembayangan Ergodik (Fakhari & Ghane 2010) dan sifat pembayangan had (Pilyugin 1999).

Kajian Dong *et al*. (2020) telah mempertimbangkan sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian untuk suatu homeomorfisma sebagai satu konsep sifat pembayangan baharu yang boleh diterokai. Pengenalan asal bagi sifat pembayangan secara akhirnya telah bermula daripada kajian Oprocha (2016) dan kajian Good dan Meddaugh (2018). Oprocha (2016) telah memperkenalkan konsep tersebut untuk suatu pemetaan selanjar dan memanggil konsep tersebut dengan istilah yang berbeza iaitu sifat pembayangan-$\left(\mathbb{N}, F_{cf}\right)$. Dengan huraian takrif yang sama, Good dan Meddaugh (2018) pula telah mempertimbangkannya sebagai sifat pembayangan secara akhirnya untuk suatu pemetaan selanjar. Tumpuan kajian makalah ini juga berminat untuk memperkenalkan konsep sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ dengan merujuk konsep yang telah diperkenalkan untuk homeomorfisma oleh Dong *et al*. (2020).

Kajian ini seterusnya memerhatikan hubungan sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ tersebut dengan kesetaraan antara dua set yang tertentu. Dalam kajian terhadap homeomorfisma, dua jenis set dengan ciri-ciri tertentu telah diperkenalkan yang dikenali sebagai set titik-titik tidak merayau dan set rantaian berulang. Beberapa kajian lepas telah membincangkan tentang kesetaraan antara dua set tersebut menurut pandangan masing-masing. Pemerhatian daripada kajian Das *et al*. (2013) telah mendapati bahawa dua set tersebut adalah setara bagi homeomorfisma yang mempunyai sifat pembayangan. Manakala Dong *et al*. (2020) juga mengesahkan kesetaraan dua set tersebut berlaku bagi homeomorfisma yang mempunyai sifat pembayangan secara akhirnya pada set rantaian berulang.

Disamping itu, dua jenis set yang khusus bagi tindakan-$\mathbb{Z}^d$ telah diperkenalkan mengikut cara yang sama seperti pengenalan set titik-titik tidak merayau dan set rantaian berulang bagi homeomorfisma. Kedua-dua set tersebut dikenali sebagai set titik-titik tidak merayau jenis-k dan set rantaian berulang jenis-k. Kajian Oprocha (2008) dan kajian Kim dan Lee (2014) telah tertumpu kepada kedua-dua set tersebut dan mendapati bahawa kesetaraan antara mereka juga berlaku bagi tindakan-$\mathbb{Z}^d$ yang mempunyai sifat pembayangan. Oleh yang demikian, tumpuan utama perbincangan ini adalah untuk mempertimbangkan sifat pembayangan secara akhirnya pada set rantaian berulang jenis-k bagi suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ dan seterusnya membuktikan kesetaraan antara set titik-titik tidak merayau jenis-k dengan set rantaian berulang jenis-k sebagai hasil utama kajian.

2. Takrif Asas

Kesemua takrif asas dan istilah penting perlu diperkenalkan dalam bahagian ini. Andaikan (X,ρ) sebagai suatu ruang metrik padat dan ρ adalah suatu metrik pada X. Suatu set $U_r(a)$ merupakan suatu kejiranan-r bagi unsur $a \in X$; iaitu, $U_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x,a) < r\}$. Andaikan suatu pemetaan $f : X \to X$ sebagai suatu homeomorfisma pada ruang X. Kemudian, tindakan-$\mathbb{Z}^d$ bagi suatu $d > 0$ pada ruang metrik X merupakan suatu pemetaan selanjar $T : \mathbb{Z}^d \times X \to X$ sehinggakan

(1) $T(\mathbf{0}, x) = x$ untuk $\mathbf{0} \in \mathbb{Z}^d$ dan sebarang unsur $x \in X$,

(2) $T(\mathbf{n}, T(\mathbf{m}, x)) = T(\mathbf{n} + \mathbf{m}, x)$ untuk sebarang $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ dan $x \in X$.

Pemetaan $T^{\mathbf{n}} : X \to X$ ditakrifkan sebagai $T^{\mathbf{n}}(x) = T(\mathbf{n}, x)$ untuk setiap unsur $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ dan $x \in X$. Perhatikan bahawa pemetaan $T^{\mathbf{n}}$ adalah suatu homeomorfisma pada X.

Seterusnya, setiap unsur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ boleh diungkapkan kepada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ yang $x_i \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Andaikan $k \in \{1, 2, \ldots, 2^d\}$ dan k' mewakili $k-1$ dalam sistem perduaan posisi-d iaitu $k' \in \{0,1\}^d$ sehinggakan

$$k = 1 + \sum_{i=1}^{d} k_i' \cdot 2^{i-1}.$$

Bagi dua unsur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$, dikatakan bahawa $\mathbf{x} >^k \mathbf{y}$ jika $(-1)^{k_i'} x_i > (-1)^{k_i'} y_i$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Ketaksamaan jenis-$k$ yang diperkenalkan bagi unsur-unsur $\mathbb{Z}^d$ adalah berperanan penting dalam kajian ini dan terdapat satu lema yang menghuraikan hubungan antara dua unsur $\mathbb{Z}^d$ seperti berikut.

Lema 2.1. *Bagi setiap* $\mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ *dan* $k \in \{1, 2, \ldots, 2^d\}$ *yang* $\mathbf{m} >^k \mathbf{l}$, *terdapat suatu unsur* $\mathbf{r} >^k \mathbf{0}$ *sehinggakan* $\mathbf{m} = \mathbf{l} + \mathbf{r}$.

Bukti. Andaikan $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_d)$ dan $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_d)$ untuk $\mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$. Andaikan $k \in \{1, 2, \ldots, 2^d\}$ yang $\mathbf{m} >^k \mathbf{l}$. Seterusnya, andaikan $k' = (k_1', k_2', \ldots, k_d') \in \{0,1\}^d$ sehinggakan $k = 1 + \sum_{i=1}^{d} k_i' \cdot 2^{i-1}$. Maka, $(-1)^{k_i'} m_i > (-1)^{k_i'} l_i$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Maka, $(-1)^{k_i'} m_i - (-1)^{k_i'} l_i > 0$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Biarkan $\mathbf{0} = (0_1, 0_2, \ldots, 0_d)$ yang $0_i = 0$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Maka, $(-1)^{k_i'} (m_i - l_i) > (-1)^{k_i'} 0_i$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Andaikan $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$ bagi $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^d$ sehinggakan $r_i = m_i - l_i$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Maka, $\mathbf{l} + \mathbf{r} = (l_1, l_2, \ldots, l_d) + (m_1 - l_1, m_2 - l_2, \ldots, m_d - l_d) = \mathbf{m}$. Oleh kerana $(-1)^{k_i'} r_i > (-1)^{k_i'} 0_i$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, maka kesimpulannya adalah wujudnya $\mathbf{r} >^k \mathbf{0}$ yang memenuhi $\mathbf{m} = \mathbf{l} + \mathbf{r}$. □

Andaikan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_d$ sebagai vektor asas kanun piawai bagi $\mathbb{R}^d$. Maka, setiap $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ boleh diungkapkan sebagai $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + \ldots + n_d\mathbf{e}_d$ yang $n_i \in \mathbb{Z}$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Kemudian, kajian ini memperkenalkan suatu jujukan yang dikenali sebagai orbit pseudo-δ melalui takrif di bawah.

Takrif 2.2. Suatu jujukan $\xi = \{x_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d}$ dalam (X, ρ) dikenali sebagai suatu *orbit pseudo-*δ bagi pemetaan selanjar T jika $\rho\left(T^{\mathbf{e}_i}(x_{\mathbf{n}}), x_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_i}\right) < \delta$ untuk sebarang $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ dan $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Kajian Oprocha (2008) sebelum ini telah memperkenalkan sifat pembayangan untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ iaitu pemetaan T pada ruang (X, ρ) dikatakan mempunyai sifat pembayangan jika bagi setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sehinggakan setiap orbit pseudo-δ

$\xi = \{x_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \subset X$ dibayangi-ε oleh suatu unsur daripada X; iaitu, terdapat suatu unsur $y \in X$ sehinggakan $\rho\left(T^{\mathbf{n}}(y), x_{\mathbf{n}}\right) < \varepsilon$ untuk setiap $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. Sifat pembayangan untuk tindakan-$\mathbb{Z}^d$ telah dihuraikan dengan cara yang sama seperti takrif sifat pembayangan untuk suatu homeomorfisma $f : X \to X$ yang boleh dilihat dalam Pilyugin (1999). Manakala, kajian Dong *et al*. (2020) telah memperkenalkan takrif sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian untuk suatu homeomorfisma, $f : X \to X$. Kajian ini telah mengambil ilham daripadanya untuk memperkenalkan sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$. Takrifan tersebut melibatkan penggunaan norma Euklidan $\|\mathbf{i}\|$ bagi $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$, iaitu $\|\mathbf{i}\| = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_d^2}$. Satu hubungan penting berkenaan norma tersebut diperoleh sedemikian.

Lema 2.3. *Jika* $\mathbf{s} >^k \mathbf{p} >^k \mathbf{0}$ *yang* $\mathbf{s}, \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ *dan* $k \in \{1, 2, ..., 2^d\}$*, maka* $\|\mathbf{s}\| > \|\mathbf{p}\|$.

Bukti. Andaikan $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_d)$ dan $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ bagi $\mathbf{s}, \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$. Andaikan bahawa $\mathbf{s} >^k \mathbf{p} >^k \mathbf{0}$ yang $k \in \{1, 2, \ldots, 2^d\}$. Memandangkan $\mathbf{s} >^k \mathbf{p}$, maka berdasarkan Lema 2.1 terdapatnya suatu unsur $\mathbf{r} >^k \mathbf{0}$ sehinggakan $\mathbf{s} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$. Katakan $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$. Seterusnya, andaikan $k' = (k_1', k_2', \ldots, k_d') \in \{0,1\}^d$ sehinggakan $k = 1 + \sum_{i=1}^{d} k_i' \cdot 2^{i-1}$. Oleh kerana $\mathbf{p} >^k \mathbf{0}$ dan $\mathbf{r} >^k \mathbf{0}$, maka $(-1)^{k_i'} p_i > 0$ dan $(-1)^{k_i'} r_i > 0$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Maka, $(-1)^{k_i'}(p_i + r_i) > (-1)^{k_i'} p_i > 0$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Maka, $(p_i + r_i)^2 > p_i^2 > 0$ untuk semua $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Maka, $\sqrt{(p_1 + r_1)^2 + (p_2 + r_2)^2 + \cdots + (p_d + r_d)^2} > \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_d^2}$. Justeru, $\|\mathbf{s}\| > \|\mathbf{p}\|$. □

Seterusnya, pengenalan sifat pembayangan secara akhirnya pada subset tak varian untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ boleh dirujuk dalam takrif yang berikut.

Takrif 2.4. Andaikan T merupakan suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ pada suatu ruang metrik padat (X, ρ). Tindakan-$\mathbb{Z}^d$ tersebut dikatakan mempunyai *sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian* Λ bagi X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehinggakan setiap orbit pseudo-δ $\{x_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d} \subset \Lambda$ dibayangi-ε secara akhirnya oleh suatu unsur $y \in X$; iaitu, terdapat suatu $N > 0$ sehinggakan $\rho\left(T^{\mathbf{i}}(y), x_{\mathbf{i}}\right) < \varepsilon$ untuk semua $\|\mathbf{i}\| \geq N$.

Berdasarkan Takrif 2.4 di atas, perkara yang dapat dilihat dengan jelas adalah takrif sifat pembayangan secara akhirnya pada subset tak varian adalah berbeza dengan takrif sifat pembayangan bagi suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$. Selain itu, satu fakta yang dapat diperhatikan daripada takrif di atas adalah sifat pembayangan mengimplikasikan kepada sifat pembayangan secara akhirnya pada subset tak varian bagi suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$. Namun, hubungan yang sebaliknya adalah tidak semestinya berlaku secara umum. Justeru, kedua-dua jenis sifat pembayangan tersebut adalah tidak setara antara satu sama lain secara umum.

Seterusnya, tumpuan kajian ini adalah untuk melihat implikasi sifat pembayangan secara akhirnya pada subset tak varian bagi tindakan-$\mathbb{Z}^d$ terhadap kesetaraan antara set titik-titik tidak merayau jenis-k dan set rantaian berulang jenis-k. Oleh yang demikian, kajian ini memerhatikan dua jenis titik dengan ciri-ciri tertentu yang dikenali sebagai titik tidak merayau jenis-k dan titik rantaian berulang jenis-k. Bahagian yang selanjutnya akan menghuraikan takrif bagi kedua-dua titik tersebut.

3. Set $\Omega^k(T)$ dan Set $CR^k(T)$

Dua subset bagi ruang X yang dipertimbangkan oleh kajian ini adalah set titik-titik tidak merayau jenis-k, $\Omega^k(T)$ dan set rantaian berulang jenis-k, $CR^k(T)$. Unsur-unsur bagi kedua-dua set tersebut mempunyai ciri-ciri tertentu yang perlu diteliti. Pengenalan kepada titik tidak merayau jenis-k telah dilakukan oleh kajian Oprocha (2008) dan boleh dirujuk melalui takrif yang berikut.

Takrif 3.1. [Oprocha (2008)] Andaikan T merupakan suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ yang tertakrif pada ruang metrik padat (X,ρ). Suatu unsur $x\in X$ dikatakan sebagai *titik tidak merayau jenis-* k jika untuk sebarang $\delta>0$ dan unsur $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d$, terdapat suatu unsur $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$ sehinggakan $\mathbf{n}>^k\mathbf{m}$ dan $T^{\mathbf{n}}\left(U_\delta(x)\right)\cap U_\delta(x)\neq\varnothing$. Maka, set $\Omega^k(T)$ adalah set yang mengandungi kesemua titik tidak merayau jenis-k dan dikenali sebagai *set titik-titik tidak merayau jenis-* k bagi pemetaan T.

Takrif set $\Omega^k(T)$ di atas mempunyai persamaan dengan cara set titik-titik tidak merayau $\Omega(f)$ yang diperkenalkan untuk suatu homeomorfisma $f:X\to X$ dalam beberapa kajian yang lepas. Kemudian, kajian Oprocha (2008) juga telah memperkenalkan titik rantaian berulang jenis-k yang boleh dilihat dalam takrif di bawah.

Takrif 3.2. [Oprocha (2008)] Andaikan T merupakan suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ yang tertakrif pada ruang metrik padat (X,ρ). Suatu unsur $x\in X$ dikatakan sebagai *titik rantaian berulang jenis-* k jika untuk setiap $\delta>0$ terdapat suatu orbit pseudo-δ $\{x_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ sehinggakan dua syarat berikut dipenuhi iaitu

(1) $x_{\mathbf{0}}=x$,

(2) jika untuk unsur tertentu $y\in X$ dan indeks tertentu $\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d$ sehinggakan persamaan $x_{\mathbf{n}}=y$ dicapai, maka set

$$\left\{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d : x_{\mathbf{j}}=y, \mathbf{j}>^k\mathbf{l}\right\}$$

adalah tak terhingga untuk sebarang $\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d$.

Maka, *set rantaian berulang jenis-* k adalah set yang mengandungi kesemua titik rantaian berulang jenis-k dan seterusnya dilabelkan sebagai $CR^k(T)$. Kemudian, setiap orbit pseudo-δ yang memenuhi kedua-dua syarat (1) dan (2) di atas adalah dikenali sebagai suatu *rantaian-δ jenis-* k bagi x.

Beberapa kajian terhadap homeomorfisma $f : X \to X$ juga telah memperkenalkan set yang bercirikan sama seperti set $CR^k(T)$ di atas yang dikenali sebagai set rantaian berulang $CR(f)$. Oleh sebab itu, kajian yang melibatkan set $CR(f)$ bagi homeomorfisma boleh dibandingkan dengan kajian yang melibatkan set $CR^k(T)$ bagi tindakan-$\mathbb{Z}^d$. Kajian makalah ini memerhatikan hubungan antara set titik-titik tidak merayau jenis-k dan set rantaian berulang jenis-k. Dalam pemerhatian tersebut, kajian ini memperolehi satu lema menarik yang diperlukan bagi pembuktian hasil utama. Lema tersebut menghuraikan satu sifat yang wujud untuk suatu titik rantaian berulang jenis-k. Pembuktiannya dapat dilihat seperti di bawah.

Lema 3.3. *Andaikan T adalah suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ pada ruang metrik padat (X,ρ). Jika $x \in CR^k(T)$, maka untuk sebarang $\delta > 0$ kita boleh membina suatu rantaian-δ jenis-k bagi x dengan kesemua unsurnya adalah terkandung dalam set rantaian berulang jenis-k, $CR^k(T)$.*

Bukti. Andaikan $x \in CR^k(T)$ dan andaikan $\delta > 0$. Secara percanggahan, andaikan bahawa terdapat suatu rantaian-δ jenis-k bagi x yang bukan kesemua unsurnya adalah titik-titik rantaian berulang jenis-k. Oleh yang demikian, terdapat suatu orbit pseudo-δ $\{x_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} \subset X$ bagi T dengan $x_{\mathbf{0}} = x$ sehinggakan bukan kesemua unsurnya terkandung dalam $CR^k(T)$. Maka, terdapat suatu indeks $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ sehinggakan $x_{\mathbf{j}} \notin CR^k(T)$.

Andaikan $y = x_{\mathbf{j}}$. Memandangkan $\{x_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ telah memenuhi kedua-dua syarat (1) dan (2) dalam Takrif 3.2 bagi titik rantaian berulang jenis-k, maka untuk indeks $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$, terdapat unsur $\mathbf{t}_1 >^k \mathbf{j}$ sehinggakan $x_{\mathbf{t}_1} = y$. Ketahui juga bahawa untuk indeks $\mathbf{t}_1 >^k \mathbf{j}$, terdapat unsur $\mathbf{t}_2 >^k \mathbf{t}_1$ sehinggakan $x_{\mathbf{t}_2} = y$. Pemerhatian yang jelas mendapati bahawa $\mathbf{t}_2 >^k \mathbf{t}_1 >^k \mathbf{j}$. Kemudian, pengulangan langkah yang sama telah dilakukan untuk $\mathbf{t}_2 >^k \mathbf{t}_1$ yang berikutnya dan akhirnya didapati bahawa suatu set indeks $\{\mathbf{t}_s\}_{s\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ dapat diwujudkan yang $x_{\mathbf{t}_s} = y$ dan $\mathbf{t}_{s+1} >^k \mathbf{t}_s$ untuk setiap $s \in \mathbb{N}$. Oleh kerana $\mathbf{t}_s >^k \mathbf{j}$ dan $\mathbf{t}_{s+1} >^k \mathbf{t}_s$ untuk semua $s \in \mathbb{N}$, maka secara jelas dapat dilihat bahawa terdapat suatu unsur $M \in \mathbb{N}$ sehinggakan $\mathbf{t}_m >^k \mathbf{0}$ untuk semua $m > M$. Andaikan $\mathbf{d} = \mathbf{t}_{M+1} >^k \mathbf{0}$ dan perhatikan bahawa $x_{\mathbf{d}} = y$.

Seterusnya, andaikan suatu jujukan baharu $\{z_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d} \subset X$ sehinggakan $z_{\mathbf{i}} = x_{\mathbf{i}+\mathbf{d}}$ untuk setiap $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$. Jelas sekali, jujukan $\{z_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ tersebut adalah suatu orbit pseudo-δ yang memenuhi ciri (1) dan (2) dalam Takrif 3.2. Disebabkan $z_{\mathbf{0}} = y$, maka orbit pseudo-δ $\{z_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ boleh dikatakan sebagai suatu rantaian-δ jenis-k bagi y. Oleh kerana $\delta > 0$ adalah tetapan sebarangan, maka secara jelas dapat dilihat bahawa unsur y adalah suatu titik rantaian berulang jenis- k dan ini adalah suatu percanggahan memandangkan $y = x_{\mathbf{j}} \notin CR^k(T)$. Justeru, suatu rantaian-δ jenis-k boleh dibina bagi x dengan sebarang $\delta > 0$ yang setiap unsurnya adalah terkandung dalam $CR^k(T)$. □

4. Implikasi Sifat Pembayangan Secara Akhirnya pada $CR^k(T)$

Menurut Teorem 4.2 dalam makalah Oprocha (2008), set rantaian berulang jenis-k bagi tindakan-$\mathbb{Z}^d$ iaitu $CR^k(T)$ telah disahkan bahawa ianya adalah tertutup dan tak varian. Maka, kajian makalah ini dapat mempertimbangkan sifat pembayangan secara akhirnya pada set $CR^k(T)$ untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$. Pemerhatian utama yang dilakukan oleh kajian ini adalah untuk melihat implikasi sifat pembayangan secara akhirnya pada set $CR^k(T)$ untuk suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$. Hasil utama yang diperolehi oleh kajian ini adalah membuktikan kesetaraan set titik-titik tidak merayau jenis-k dengan set rantaian berulang jenis-k iaitu $\Omega^k(T)=CR^k(T)$ sekiranya tindakan-$\mathbb{Z}^d$ mempunyai sifat pembayangan secara akhirnya pada set rantaian berulang jenis-k, $CR^k(T)$. Teorem berikut menghuraikan pembuktian bagi hasil utama tersebut.

Teorem 4.1. *Andaikan T adalah suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ pada ruang metrik padat (X,ρ). Jika T mempunyai sifat pembayangan secara akhirnya pada set rantaian berulang jenis-k $CR^k(T)$, maka didapati bahawa $\Omega^k(T)=CR^k(T)$ untuk setiap $k\in\{1,2,...,2^d\}$.*

Bukti. Andaikan T merupakan suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ pada ruang metrik padat (X,ρ) yang mempunyai sifat pembayangan secara akhirnya pada set rantaian berulang jenis-k, $CR^k(T)$. Maka, bagi sebarang $\varepsilon>0$, terdapat suatu $\delta>0$ sehinggakan setiap orbit pseudo-δ $\{x_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\subset CR^k(T)$ dibayangi-ε secara akhirnya oleh suatu unsur daripada X. Menurut Takrif 3.1 bagi titik tidak merayau jenis-k, perkara yang dapat dilihat secara jelasnya adalah $\Omega^k(T)\subset CR^k(T)$ untuk setiap $k\in\{1,2,\ldots,2^d\}$. Maka, terdapat satu perkara sahaja yang perlu disahkan iaitu membuktikan $CR^k(T)\subset\Omega^k(T)$ untuk setiap $k\in\{1,2,\ldots,2^d\}$. Andaikan $e>0$ merupakan suatu pemalar. Daripada sifat pembayangan secara akhirnya pada set $CR^k(T)$ yang dimiliki oleh T, maka perhatikan bahawa terdapat suatu $\delta_e>0$ yang berpadanan dengan e sehinggakan setiap orbit pseudo-δ_e dibayangi-e secara akhirnya oleh suatu unsur daripada X. Andaikan $x\in CR^k(T)$ bagi suatu $k\in\{1,2,\ldots,2^d\}$. Perhatikan bahawa terdapat suatu rantaian-τ jenis-k bagi x untuk setiap $\tau>0$. Dengan menumpu kepada δ_e dan merujuk kepada Lema 3.3, maka suatu rantaian-δ_e jenis-k bagi x boleh dibina dengan kesemua titiknya adalah terkandung dalam $CR^k(T)$. Andaikan rantaian-δ_e jenis-k bagi x tersebut sebagai suatu jujukan $\{z_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}\subset CR^k(T)$. Oleh itu, $\{z_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ adalah suatu orbit pseudo-δ_e yang juga menepati ciri (1) dan (2) dalam Takrif 3.2 bagi titik rantaian berulang jenis-k. Maka, $\{z_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ dibayangi-e secara akhirnya oleh suatu unsur daripada X. Andaikan unsur $y\in X$ dan $N>0$ yang $\rho\left(T^{\mathbf{i}}(y),z_{\mathbf{i}}\right)<e$ untuk semua $\|\mathbf{i}\|\geq N$. Andaikan suatu unsur $\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d$. Maka, perhatikan bahawa untuk $z_{\mathbf{0}}=x$ dan berdasarkan ciri (2) dalam Takrif 3.2, wujudnya suatu unsur $\mathbf{m}_1\in\mathbb{Z}^d$ sehinggakan $\mathbf{m}_1>^k\mathbf{m}$ dan $z_{\mathbf{m}_1}=x$. Kemudian, perhatikan bahawa wujudnya suatu unsur $\mathbf{m}_2\in\mathbb{Z}^d$ sehinggakan $\mathbf{m}_2>^k\mathbf{m}_1$ dan $z_{\mathbf{m}_2}=z_{\mathbf{m}_1}=x$.

Dengan pengulangan langkah yang sama untuk $\mathbf{m}_2 \in \mathbb{Z}^d$ dan berikutnya, maka suatu set indeks $\{\mathbf{m}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$ dapat diwujudkan yang $z_{\mathbf{m}_i} = x$ dan $\mathbf{m}_{i+1} >^k \mathbf{m}_i$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Secara jelas dapat dilihat bahawa terdapat suatu unsur $S \in \mathbb{N}$ sehinggakan $\mathbf{m}_s >^k \mathbf{0}$ untuk semua $s > S$. Seterusnya, terdapat dua kasus yang perlu dipertimbangkan.

Kasus yang pertama adalah sekiranya $\|\mathbf{m}_{S+1}\| \geq N$. Perhatikan bahawa $\mathbf{m}_{S+1} >^k \mathbf{m}$ dan $\rho\left(T^{\mathbf{m}_{S+1}}(y), z_{\mathbf{m}_{S+1}}\right) = \rho\left(T^{\mathbf{m}_{S+1}}(y), x\right) < e$. Andaikan $T^{\mathbf{m}_{S+1}}(y) = w$ dan jelas sekali didapati bahawa $w \in U_e(x)$. Perhatikan bahawa $\mathbf{m}_{S+1+j} >^k \mathbf{m}_{S+1}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$. Maka, berdasarkan Lema 2.1 terdapat $\mathbf{r}_j >^k \mathbf{0}$ bagi $\mathbf{m}_{S+1+j}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$ sehinggakan $\mathbf{m}_{S+1+j} = \mathbf{m}_{S+1} + \mathbf{r}_j$. Memandangkan $\mathbf{r}_{j+1} >^k \mathbf{r}_j >^k \mathbf{0}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$ dan $\mathbf{m}_{S+1} >^k \mathbf{0}$, maka didapati bahawa terdapat suatu unsur $J \in \mathbb{N}$ yang $\mathbf{r}_J >^k \mathbf{m}_{S+1}$. Oleh kerana $\mathbf{m}_{S+1+J} >^k \mathbf{m}_{S+1} >^k \mathbf{0}$ dan $\|\mathbf{m}_{S+1}\| \geq N$, maka berdasarkan Lema 2.3 ia mengimplikasikan $\|\mathbf{m}_{S+1+J}\| > \|\mathbf{m}_{S+1}\| \geq N$. Maka, $\rho\left(T^{\mathbf{m}_{S+1+J}}(y), z_{\mathbf{m}_{S+1+J}}\right) = \rho\left(T^{\mathbf{m}_{S+1+J}}(y), x\right) < e$. Memandangkan $T^{\mathbf{r}_J}(w) = T^{\mathbf{r}_J}\left(T^{\mathbf{m}_{S+1}}(y)\right) = T^{\mathbf{r}_J + \mathbf{m}_{S+1}}(y) = T^{\mathbf{m}_{S+1+J}}(y) \in U_e(x)$, maka didapati bahawa $w, T^{\mathbf{r}_J}(w) \in U_e(x)$. Oleh kerana $\mathbf{m}_{S+1} >^k \mathbf{m}$ dan $\mathbf{r}_J >^k \mathbf{m}_{S+1}$, maka $\mathbf{r}_J >^k \mathbf{m}$ dan $T^{\mathbf{r}_J}\left(U_e(x)\right) \cap U_e(x) \neq \varnothing$. Justeru, wujudnya suatu $\mathbf{r}_J >^k \mathbf{m}$ sehinggakan $T^{\mathbf{r}_J}\left(U_e(x)\right) \cap U_e(x) \neq \varnothing$.

Kasus yang kedua adalah sekiranya $\|\mathbf{m}_{S+1}\| < N$. Oleh kerana $\mathbf{m}_{S+1+j} >^k \mathbf{m}_{S+j} >^k \mathbf{0}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$, maka berdasarkan Lema 2.3 ia mengimplikasikan $\|\mathbf{m}_{S+1+j}\| > \|\mathbf{m}_{S+j}\|$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}$. Disebabkan nilai $\|\mathbf{m}_{S+1+j}\|$ meningkat dengan peningkatan unsur $j \in \mathbb{N}$, maka didapati bahawa terdapat suatu unsur $R \in \mathbb{N}$ yang $\|\mathbf{m}_{S+1+R}\| \geq N$. Maka, indeks $\mathbf{m}_{S+1+R}$ bagi $R \in \mathbb{N}$ boleh dipertimbangkan ke dalam kasus yang pertama.

Justeru, kedua-dua kasus tersebut menunjukkan bahawa wujudnya suatu $\mathbf{r} >^k \mathbf{m}$ sehinggakan $T^{\mathbf{r}}\left(U_e(x)\right) \cap U_e(x) \neq \varnothing$. Oleh kerana $e > 0$ dan unsur $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$ adalah tetapan sebarangan, maka $x \in \Omega^k(T)$ dan seterusnya $\Omega^k(T) = CR^k(T)$ untuk setiap $k \in \{1, 2, \ldots, 2^d\}$. □

5. Kesimpulan

Perbandingan antara beberapa kajian lepas telah diambil perhatian berkenaan kajian terhadap homeomorfisma dan kajian terhadap tindakan-$\mathbb{Z}^d$. Kajian-kajian lepas telah mengesahkan bahawa terdapat kesetaraan antara dua set $\Omega(f) = CR(f)$ bagi suatu homeomorfisma f dengan syarat sama ada homeomorfisma f mempunyai sifat pembayangan atau ia mempunyai sifat pembayangan secara akhirnya pada set rantaian berulang, $CR(f)$. Manakala terdapat kajian terhadap tindakan-$\mathbb{Z}^d$ yang telah membuktikan bahawa berlakunya kesetaraan antara dua set $\Omega^k(T) = CR^k(T)$ bagi kasus sekiranya pemetaan T mempunyai sifat pembayangan. Kemudian, kajian ini telah memperkenalkan takrif sifat pembayangan secara akhirnya pada suatu subset tak varian bagi tindakan-$\mathbb{Z}^d$ dengan melibatkan penggunaan norma Euklidan dan telah mengesahkan beberapa hubungan tertentu. Justeru, kesimpulan yang dapat diperolehi daripada perbincangan kajian ini adalah terbuktinya kesetaraan antara dua set $\Omega^k(T) = CR^k(T)$ bagi T yang merupakan suatu tindakan-$\mathbb{Z}^d$ dengan syarat awalnya jika pemetaan T tersebut mempunyai sifat pembayangan atau ia mempunyai sifat pembayangan secara akhirnya pada set rantaian berulang jenis-k, $CR^k(T)$.

Penghargaan

Ucapan penghargaan jutaan terima kasih kepada Universiti Kebangsaan Malaysia dan Pusat Pengurusan Penyelidikan dan Instrumentasi (CRIM) atas pembiayaan kewangan melalui FRGS/1/2021/STG06/UKM/02/4.

Rujukan

Chung N. & Lee K. 2018. Topological stability and pseudo-orbit tracing property of group actions. *Proceedings of the American Mathematical Society* **146**(3): 1047–1057.

Darabi A. & Forouzanfar A. 2017. Periodic shadowing and standard shadowing property. *Asian-European Journal of Mathematics* **10**(1): 1750006.

Darji U., Goncalves D. & Sobottka M. 2021. Shadowing, finite order shifts and ultrametric spaces. *Advances in Mathematics* **385**: 107760.

Das T., Lee K., Richeson D. & Wiseman J. 2013. Spectral decomposition for topologically anosov homeomorphisms on noncompact and non-metrizable spaces. *Topology and Its Applications* **160**(1): 149–158.

Dong M., Lee K. & Nguyen N. 2020. Expanding measures for homeomorphisms with eventually shadowing property. *Journal of Korean Mathematical Society* **57**(4): 935–955.

Fakhari A. & Ghane F. 2010. On shadowing: Ordinary and ergodic. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **364**(1): 151–155.

Good C. & Meddaugh J. 2018. Orbital shadowing, internal chain transitivity and ω-limit sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **38**(1): 715–736.

Kamarudin N. & Dzul-Kifli S. 2020. $\mathbb{Z}^d$ -action induced by shift map on 1-step shift of finite type over two symbolsand k-type transitive. *Mathematics and Statistics* **8**(5): 535–541.

Kamarudin N. & Dzul-Kifli S. 2021. On sufficient conditions for chaotic behavior of multidimensional discrete time dynamical system. *The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society* **44**(5): 3307–3317.

Kim D. & Lee S. 2014. Spectral decomposition theorem of k -type nonwandering sets for $\mathbb{Z}^2$ -actions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society* **51**(2): 387–400.

Koscielniak P. 2005. On genericity of shadowing and periodic shadowing property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **310**(1): 188–196.

Koscielniak P. & Mazur M. 2007. Chaos and the shadowing property. *Topology and Its Applications* **154**(13): 2553–2557.

Kwietniak D. & Oprocha P. 2012. A note on the average shadowing property for expansive maps. *Topology and Its Applications* **159**(1): 19–27.

Lee K. & Morales C. 2017. Topological stability and pseudo-orbit tracing property for expansive measures. *Journal of Differential Equations* **262**(6): 3467–3487.

Mazur M. 2003. Weak shadowing for discrete dynamical systems on nonsmooth manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **281**(2): 657–662.

Oprocha P. 2008. Chain recurrence in multidimensional time discrete dynamical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **20**(4): 1039–1056.

Oprocha P. 2016. Shadowing, thick sets and the ramsey property. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **36**(5): 1582–1595.

Pilyugin S. 1999. *Shadowing in Dynamical Systems*. Berlin: Springer-Verlag.

Pilyugin S., Rodionova A. & Sakai K. 2003. Orbital and weak shadowing properties. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **9**(2): 287–308.

Shah S. & Das R. 2015a. A note on chaos for $\mathbb{Z}^d$ -action. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis* **22**(2): 95–103.

Shah S. & Das R. 2015b. On different types of chaos for $\mathbb{Z}^d$ -actions. *Journal of Mathematics Research* **7**(3): 191–197.

Walters P. 1970. Anosov diffeomorphisms are topologically stable. *Topology* **9**(1): 71–78.
Walters P. 1978. On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability. In Markley N.G., Martin J.C. & Perrizo W. (eds.). *The Structure of Attractors in Dynamical Systems*: 231–244. Berlin: Springer-Verlag.

Jabatan Sains Matematik
Fakulti Sains dan Teknologi
Universiti Kebangsaan Malaysia
43600 UKM Bangi
Selangor, MALAYSIA
*E-mail: minasyahmina.ukm@gmail.com, syahida@ukm.edu.my**

Received: 23 September 2022
Accepted: 8 November 2022

*Corresponding author