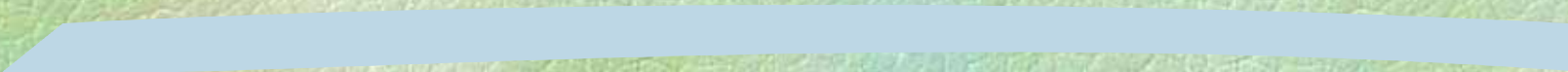


Punca Polinomial

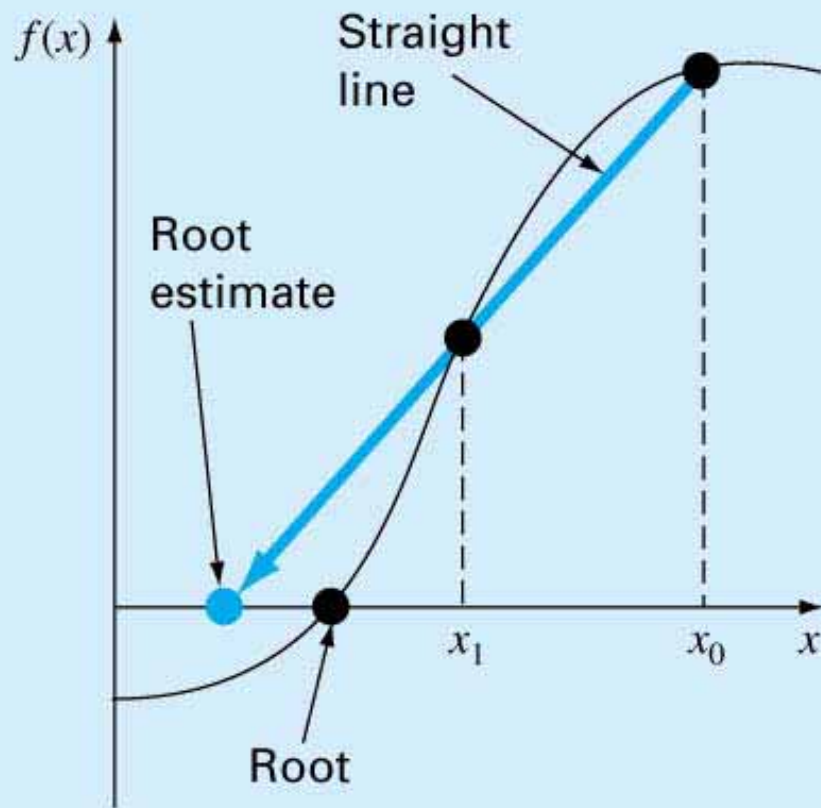


Bab 7

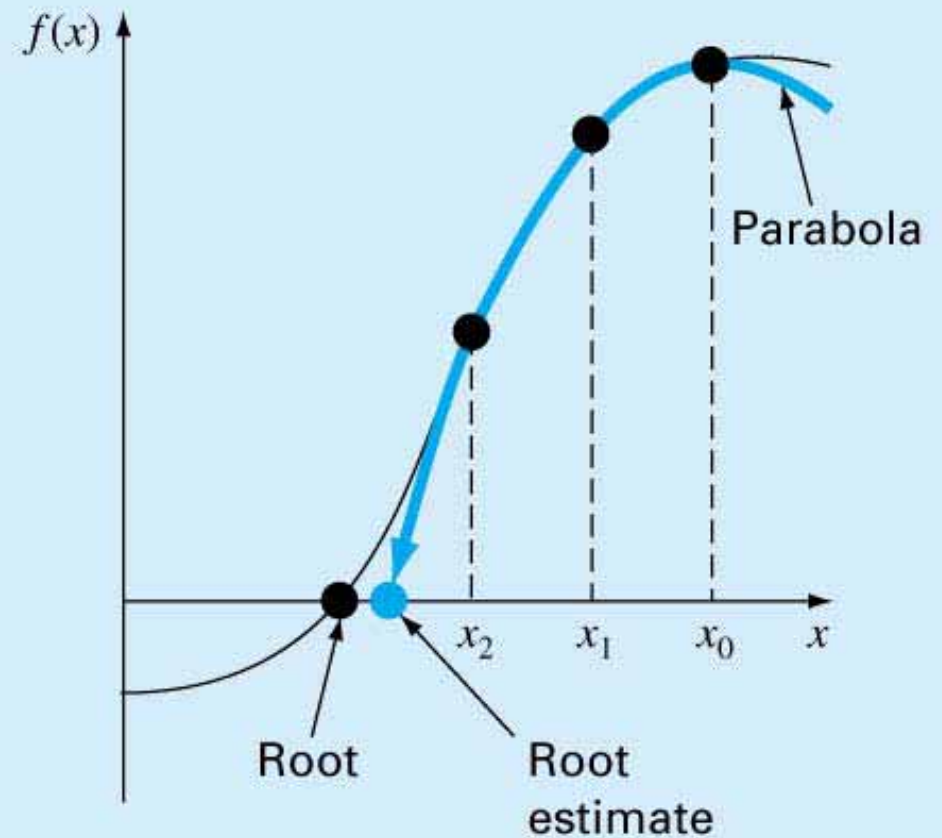
Di akhir bab ini, anda sepatutnya:

- Mampu menyelesaikan punca polinomial menggunakan kaedah Müller dan kaedah Bairstow.
- Mampu menggunakan perisian untuk mendapatkan punca polinomial

Kaedah sekan vs kaedah Müller

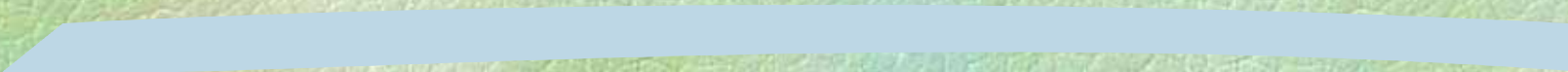


(a)



(b)

Kaedah Müller



Daripada rajah,

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \quad (7.18)$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \quad (7.19)$$

$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \quad (7.20)$$

Di mana persamaan (7.20), $f(x_2) = c$ dan

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \quad (7.21)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \quad (7.22)$$

Untuk menyelesaikan persamaan, jadikan

$$\begin{aligned} h_0 &= x_1 - x_0 & h_1 &= x_2 - x_1 \\ \delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Masukkan dalam persamaan (7.21) dan (7.22)

$$(h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a = h_0 \delta_0 + h_1 \delta_1$$

$$(h_1)b - (h_1)^2 a = h_1 \delta_1$$

Selesaikan nilai a dan b menjadi

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} \quad (7.24)$$

$$b = ah_1 + \delta_1 \quad (7.25)$$

$$c = f(x_2) \quad (7.26)$$

Untuk mencari punca, gunakan formula kuadratik:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (7.27a)$$

atau

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (7.27b)$$

Dengan ralat, ε_a

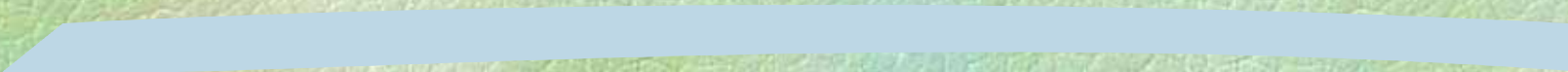
$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| 100\%$$

Contoh

- Menggunakan kaedah Müller dengan nilai awal x_0 , x_1 dan $x_2 = 4.5$, 5.5 dan 5 , dapatkan punca bagi :

$$f(x) = x^3 - 13x - 12$$

Kaedah Bairstow



Persamaan polinomial:

$$f_n(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (7.29)$$

Kaedah Bairstow membahagikan persamaan polinomial dengan faktor kuadratik:

$$x^2 - rx - s$$

Maka, persamaan polinomial yang baru menjadi:

$$f_{n-2}(x) = b_2 + b_3x + \dots + b_{n-1}x^{n-3} + b_nx^{n-2}$$

dengan baki: $R = b_1(x - r) + b_0 \quad (7.31)$

Sepertimana pembahagian secara kuadratik,

$$b_n = a_n \quad (7.32a)$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + rb_n \quad (7.32b)$$

$$b_i = a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2} \quad \text{bagi } i = n - 2 \text{ hingga } 0 \quad (7.32c)$$

Bairstow menggunakan pendekatan menghampiri kaedah Newton-Raphson, di mana oleh kerana b_0 dan b_1 adalah fungsi r dan s , ia boleh dikembangkan kepada siri Taylor seperti berikut:

$$b_1(r + \Delta r, s + \Delta s) = b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s} \Delta s$$

$$b_0(r + \Delta r, s + \Delta s) = b_0 + \frac{\partial b_0}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_0}{\partial s} \Delta s \quad (7.33)$$

Dengan menjadikan persamaan (7.33) bersamaan dengan 0,

$$\frac{\partial b_1}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s} \Delta s = -b_1 \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_0}{\partial s} \Delta s = -b_0 \quad (7.35)$$

Jika pembezaan separa boleh ditentukan, maka kedua persamaan di atas boleh diselesaikan serentak untuk mendapatkan nilai Δr dan Δs .

Bairstow menunjukkan bahwa pembezaan separa boleh diselesaikan menggunakan :

$$c_n = b_n \quad (7.36a)$$

$$c_{n-1} = b_{n-1} + rc_n \quad (7.36b)$$

$$c_i = b_i + rc_{i+1} + sc_{i+2} \quad (7.36c)$$

untuk $i=n-2$
hingga 1

di mana:

$$\frac{\partial b_0}{\partial r} = c_1, \quad \frac{\partial b_0}{\partial s} = \frac{\partial b_1}{\partial r} = c_2 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial b_1}{\partial s} = c_3$$

Pembezaan separa ini dimasukkan ke dalam persamaan (7.34) dan (7.35) bersama dengan nilai-nilai b untuk mendapat:

$$c_2 \Delta r + c_3 \Delta s = -b_1$$

$$c_1 \Delta r + c_2 \Delta s = -b_0$$

Persamaan di atas boleh diselesaikan untuk mendapatkan nilai Δr dan Δs dan seterusnya mencari nilai anggaran r dan s .

Anggaran ralat :

$$\left| \varepsilon_{a,r} \right| = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| 100\% \quad (7.37)$$

dan

$$\left| \varepsilon_{a,s} \right| = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| 100\% \quad (7.38)$$

Apabila kedua-dua ralat menjadi cukup kecil, nilai punca boleh ditentukan dengan menggunakan:

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \quad (7.39)$$

Jika persamaan merupakan polinomial peringkat satu, punca boleh dicari menggunakan:

$$x = -\frac{s}{r} \quad (7.40)$$

Contoh

- Menggunakan kaedah Bairstow dapatkan punca polinomial bagi persamaan berikut:

$$f_5(x) = x^5 - 3.5x^4 + +2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25$$

- Dengan nilai awalan $r = s = -1$ dan iterasikan sehingga $\varepsilon_s = 1\%$

Penyelesaian contoh

- Gunakan persamaan (7.32) dan (7.36)

b5	b4	b3	b2	b1	b0
1	-4.5	6.25	0.375	-10.5	11.375
c5	c4	c3	c2	c1	
1	-5.5	10.75	-4.875	-16.375	

- Selesaikan persamaan serentak Δr dan Δs
 - $-4.875\Delta r + 10.75\Delta s = 10.5$
 - $-16.375\Delta r - 4.875\Delta s = -11.375$

Penyelesaian contoh

- Di mana $\Delta r = 0.3558$ dan $\Delta s = 1.1381$

$$r = -1 + 0.3558 = -0.6442$$

$$s = -1 + 1.1381 = 0.1381$$

- Dengan ralat:

$$|\mathcal{E}_{a,r}| = \left| \frac{0.3558}{-0.6442} \right| 100\% = 55.23\%$$

$$|\mathcal{E}_{a,s}| = \left| \frac{1.1381}{0.1381} \right| 100\% = 824.1\%$$

Penyelesaian contoh

- Lelaran kedua,

b5	b4	b3	b2	b1	b0
1	-4.1442	5.5578	-2.0276	-1.8013	2.1304
c5	c4	c3	c2	c1	
1	-4.7884	8.7806	-8.3454	4.7874	

- Selesaikan persamaan serentak Δr dan Δs

$$-8.3454\Delta r + 8.7806\Delta s = 1.8013$$

$$4.7874\Delta r - 8.3454\Delta s = -2.1304$$

Penyelesaian contoh

- Di mana $\Delta r = 0.1331$ dan $\Delta s = 0.3316$

$$r = -0.6442 + 0.1331 = -0.5111$$

$$s = 0.1381 + 0.3316 = 0.4697$$

- Dengan ralat:

$$|\epsilon_{a,r}| = \left| \frac{0.1331}{-0.5111} \right| 100\% = 26.0\%$$

$$|\epsilon_{a,s}| = \left| \frac{0.3316}{0.4697} \right| 100\% = 70.6\%$$

Penyelesaian contoh

- Selepas 4 lelaran, nilai $r = 0.5$ dan $s = 0.5$
- Dengan ralat: $|\mathcal{E}_{a,r}| = 0.063\%$
 $|\mathcal{E}_{a,s}| = 0.040\%$
- Gunakan persamaan (7.39) untuk mencari punca x ,

$$x = \frac{-0.5 \pm \sqrt{(-0.5)^2 + 4(0.5)}}{2} = 0.5, -1.0$$

Penyelesaian contoh

- Dengan persamaan kubik adalah:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5.25x - 2.5$$

- Kaedah Bairstow boleh digunakan pada polinomial diatas dengan nilai awal $r = 0.5$ dan $s = 0.5$
- Selepas 5 lelaran, $r = 2$ dan $s = -1.249$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 + 4(-1.249)}}{2} = 1 \pm 0.499i$$

- Dan polinomial peringkat pertama boleh diperolehi dengan menggunakan persamaan (7.40)