

Kaedah Runge-Kutta



Bab 25

Di akhir bab ini, anda sepatutnya:

- Boleh menjelaskan gambaran visual kaedah Euler, Heun dan titik tengah
- Faham hubungan antara kaedah Euler dan siri Taylor dan ralat yang berkaitan
- Dapat membezakan ralat (**local & global truncation errors**)
- Tahu bentuk umum kaedah Runge_Kutta; faham terbitan peringkat kedua kaedah RK dan bagaimana ia dikaitkan dengan siri Taylor dan faham terdapat pelbagai versi kaedah RK peringkat kedua dan lebih tinggi

Di akhir bab ini, kamu sepatutnya:

- Tahu bagaimana untuk menggunakan mana-mana kaedah RK ke dalam persamaan sistem; boleh mengurangkan peringkat ke- n ODE ke dalam n sistem ODE peringkat pertama.

Kaedah Runge-Kutta

- Untuk menyelesaikan persamaan pembezaan biasa (ODE) dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

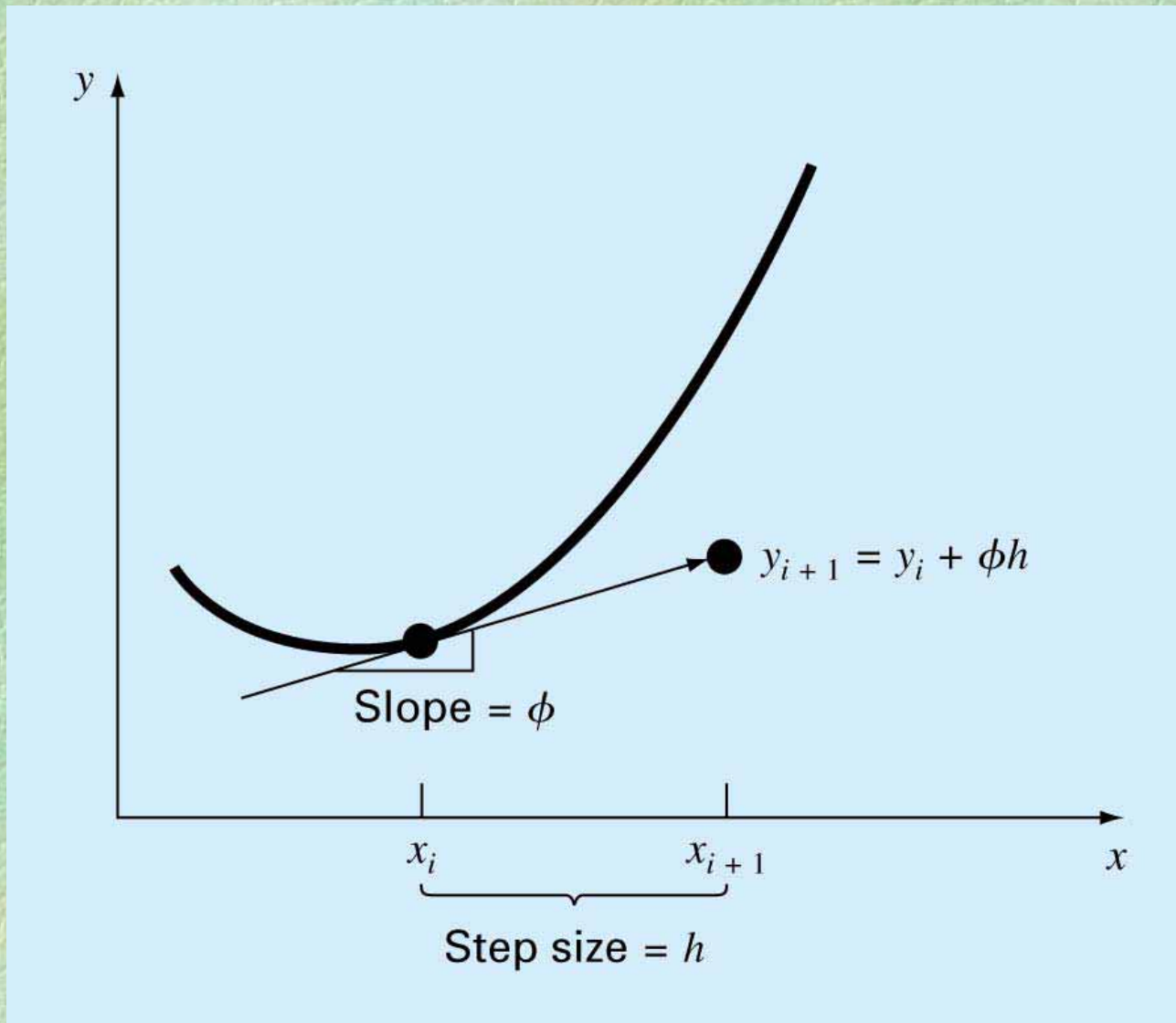
- Untuk mendapatkan nilai y yang baru :

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

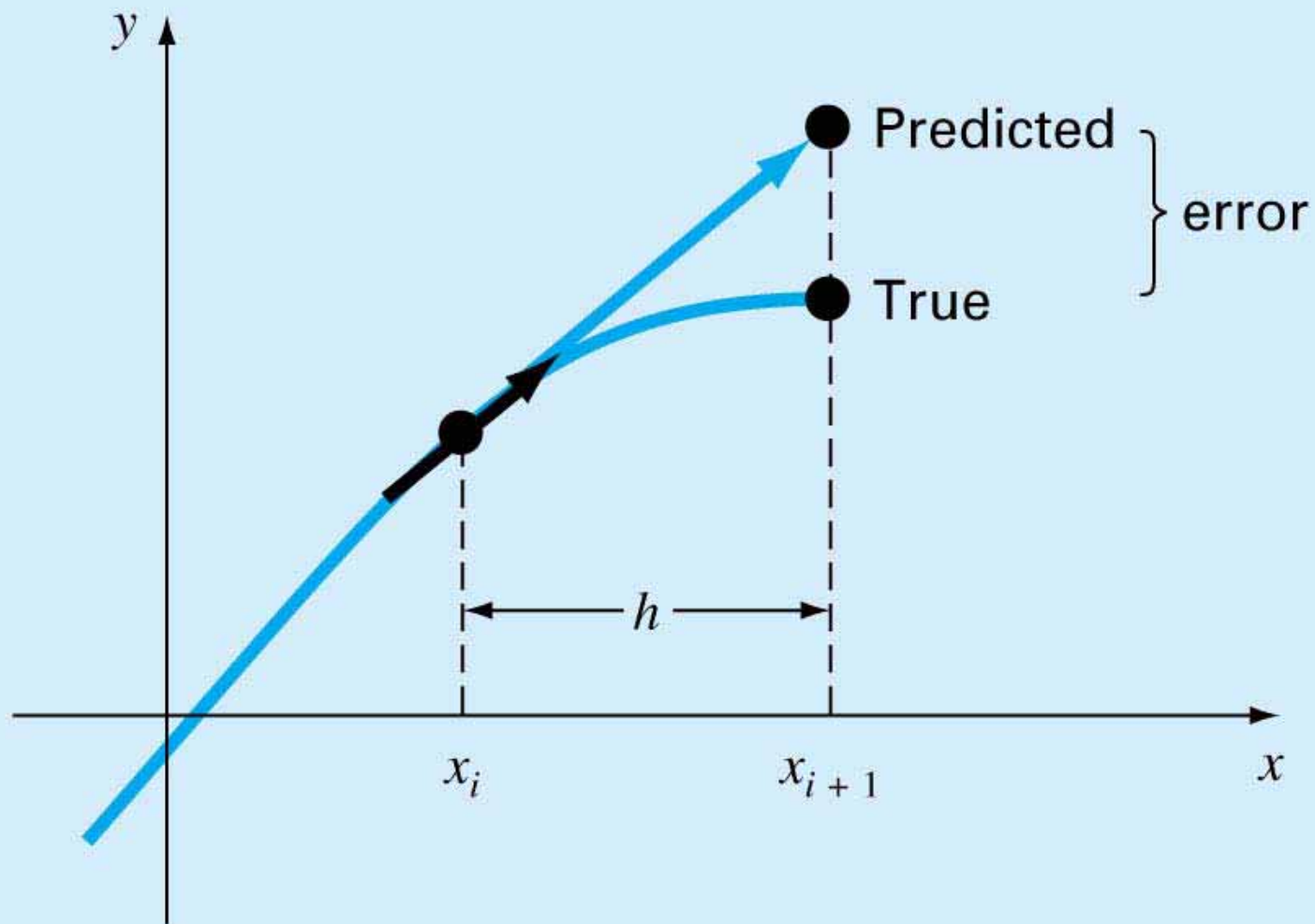
anggaran
cerun

(25.1)

Rajah 25.1



Kaedah Euler

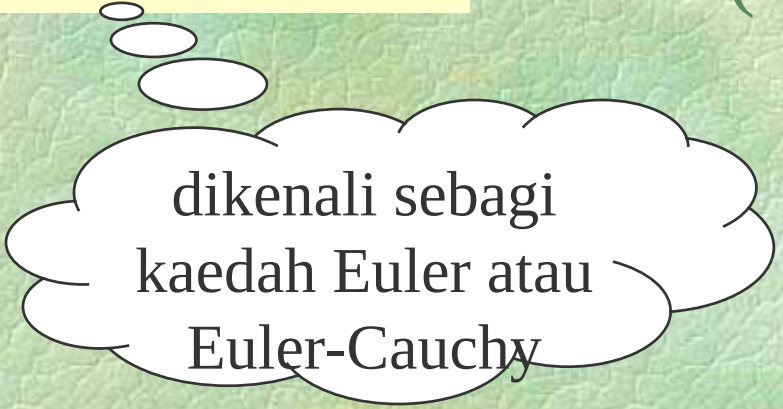


- Daripada rajah, nilai cerun, ϕ pada x_i

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

- di mana $f(x_i, y_i)$ merupakan persamaan pembezaan pada x_i dan y_i .
- Masukkan ke dalam persamaan (25.1):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (25.2)$$



dikenali sebagai
kaedah Euler atau
Euler-Cauchy

Dengan ralat

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \dots + O(h^{n+1}) \quad (25.7)$$

Jika h cukup kecil,

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 \text{ atau} \quad (25.8)$$

$$E_a = O(h^2) \quad (25.9)$$

Contoh

ingat! penyelesaian sebenar:
 $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$

Gunakan kaedah Euler untuk mengamirkan secara berangka fungsi berikut dari $x = 0$ hingga $x = 4$ dengan saiz langkah 0.5.

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Keadaan awal pada $x = 0$ adalah $y = 1$.

Penyelesaian

$$y(0.5) = y(0) + f(0,1)0.5$$

di mana $y(0) = 1$ dan anggaran cerun pada $x = 0$:

$$f(0,1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$\therefore y(0.5) = 1 + 8.5(0.5) = 5.25$$

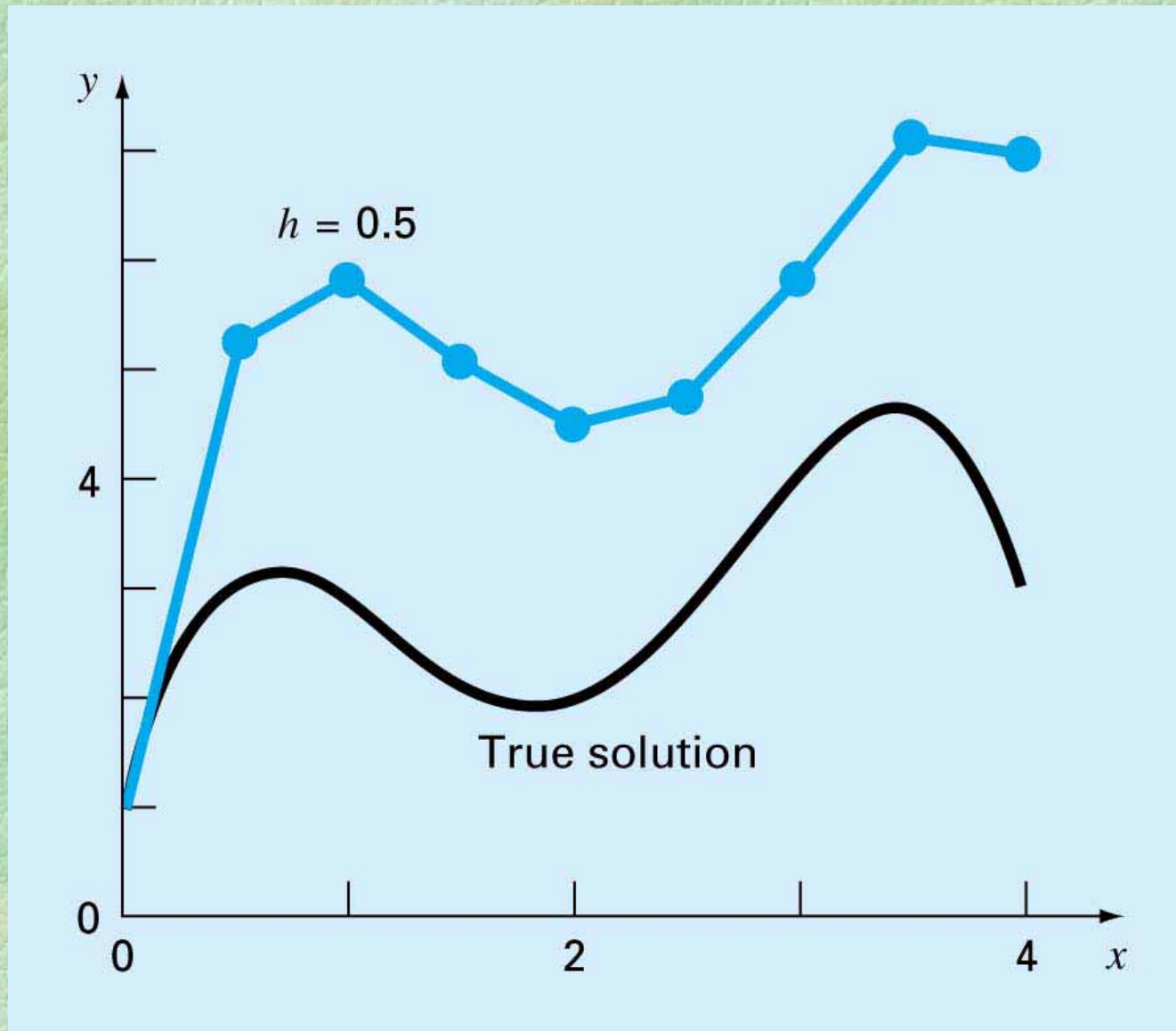
- Untuk langkah kedua:

$$y(1) = y(0.5) + f(0.5,5.25)0.5$$

$$\begin{aligned} &= 5.25 + \left[-2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5 \right] 0.5 \\ &= 5.875 \end{aligned}$$

*nilai sebenar
 $y(0.5)=3.21875$
dengan ralat
 $-2.03125(-63.1\%)$

Rajah 25.3



Mengganggu ralat Kaedah Euler
menggunakan siri Taylor



Contoh

- Gunakan persamaan (25.7) untuk menganggar ralat pada persamaan di dalam contoh sebelum ini, seterusnya tentukan ralat yang disebabkan oleh siri taylor peringkat tinggi

Penyelesaian(1)

- Oleh kerana fungsi adalah dalam bentuk polinomial, siri Taylor boleh digunakan untuk menentukan ralat menggunakan kaedah Euler. Menggunakan persamaan (25.7),

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \frac{f'(x_i, y_i)}{3!} h^3 + \frac{f'(x_i, y_i)}{4!} h^4$$

Penyelesaian(2)

$$f'(x_i, y_i) = -6x^2 + 24x - 20$$

$$f''(x_i, y_i) = -12x + 24$$

$$f^{(3)}(x_i, y_i) = -12$$

Maka ralat pada peringkat :

$$E_{t,2} = \frac{-6(0)^2 + 24(0) - 20}{2} (0.5)^2 = -2.5$$

$$E_{t,3} = \frac{-12(0) + 24}{6} (0.5)^3 = 0.5$$

$$E_{t,4} = \frac{-12}{24} (0.5)^4 = -0.03125$$

$$\therefore E_t = E_{t,2} + E_{t,3} + E_{t,4} = -2.5 + 0.5 - 0.03125 = -2.03125$$

*perhatikan bagaimana siri Taylor dapat menganggarkan ralat bagi kaedah Euler

perhatikan nilai ralat yang didapati adalah tepat untuk langkah pertama

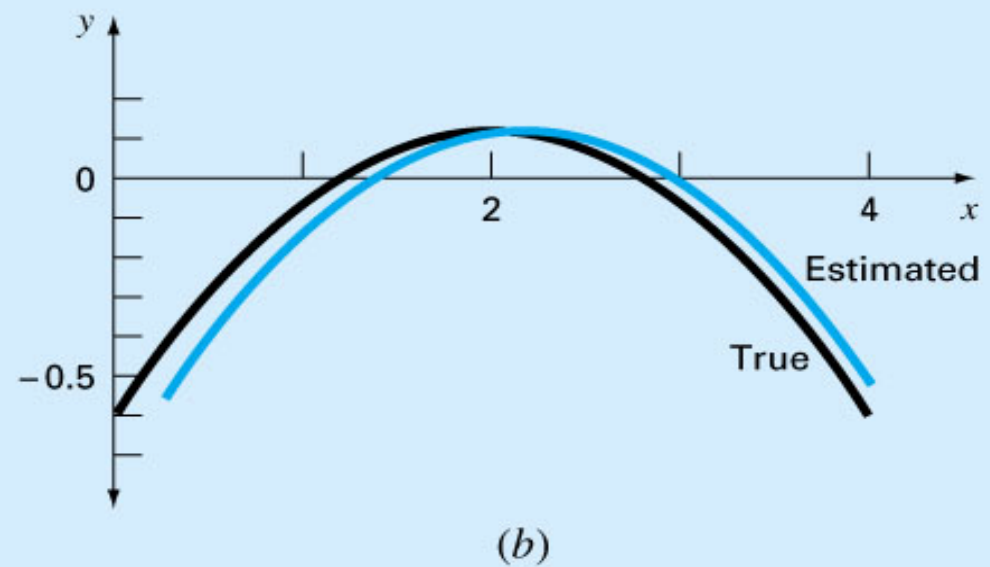
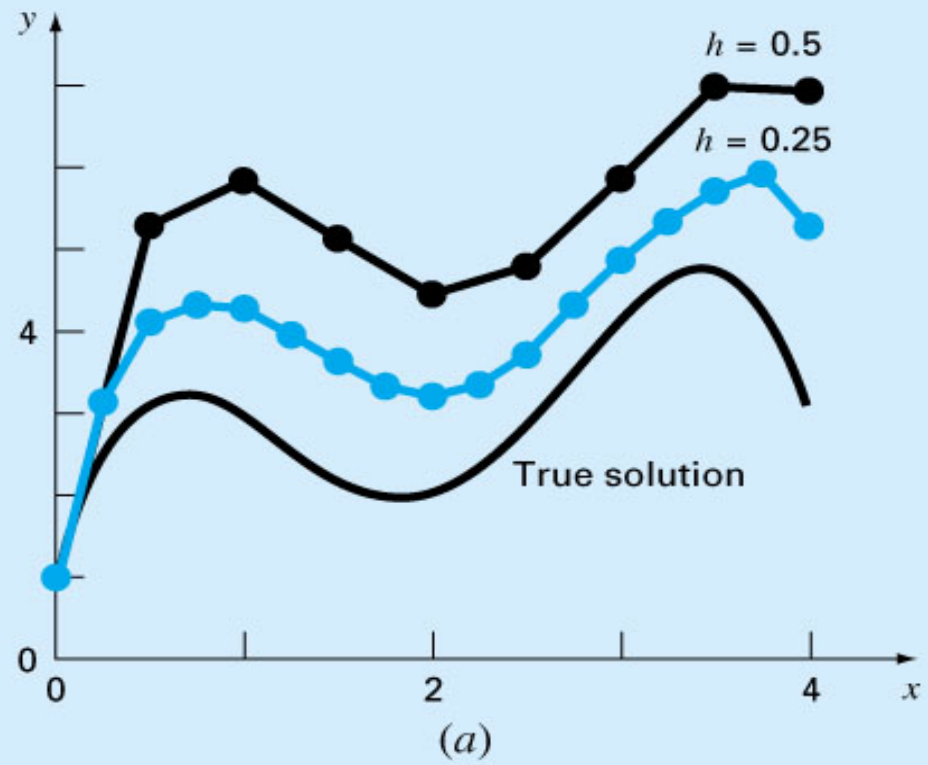
Kesan pada pengurangan saiz langkah pada kaedah Euler

Gunakan kaedah Euler untuk mengamirkan secara berangka fungsi berikut dari $x = 0$ hingga $x = 4$ dengan saiz langkah 0.25.

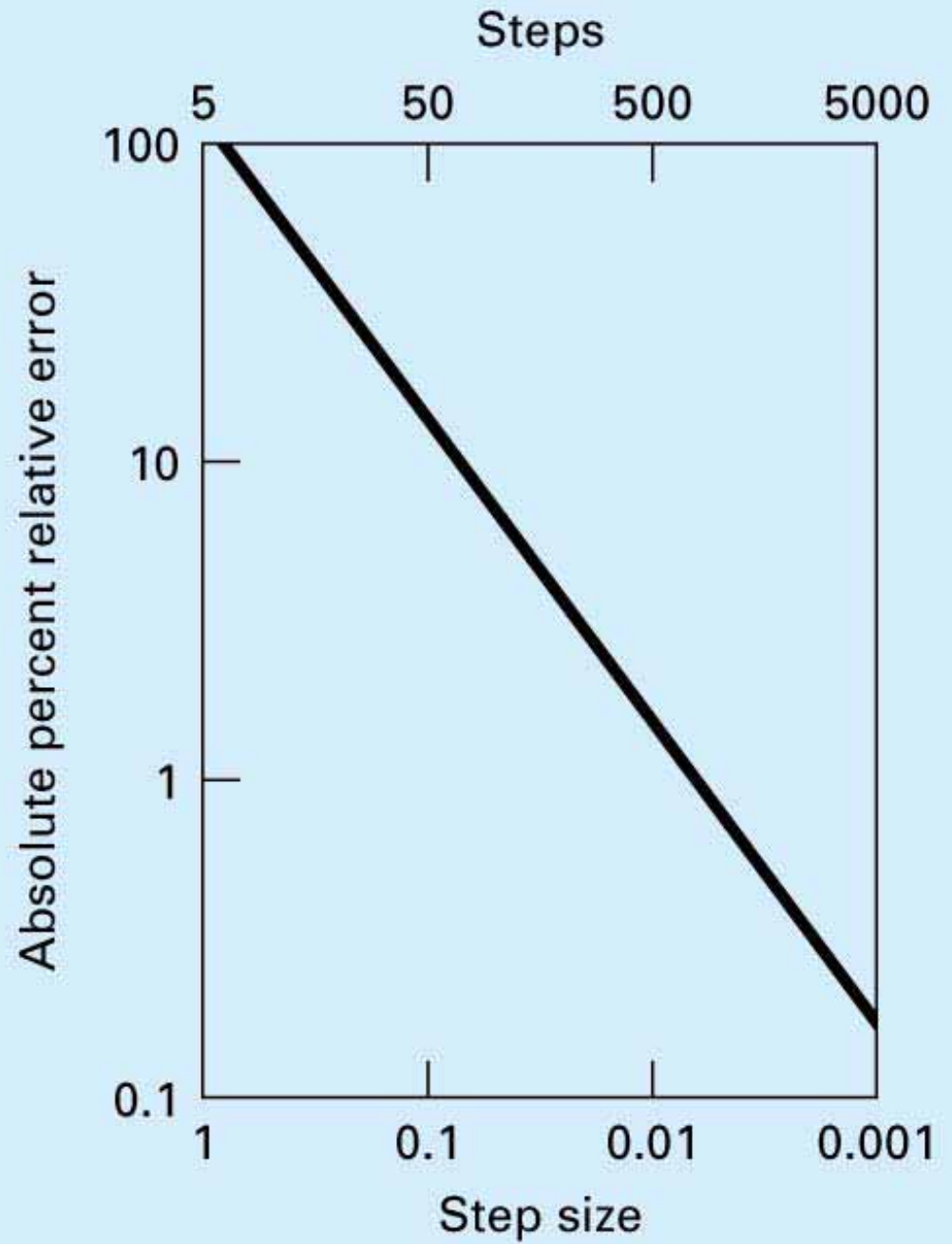
$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Keadaan awal pada $x = 0$ adalah $y = 1$.

Rajah 25.4



Rajah 25.5



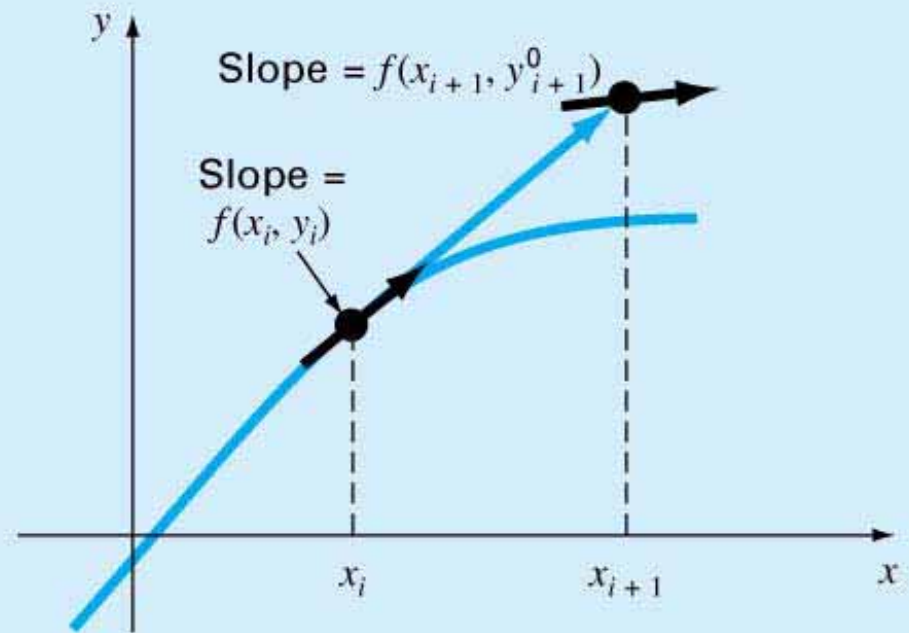
Pembaikan kepada Kaedah Euler



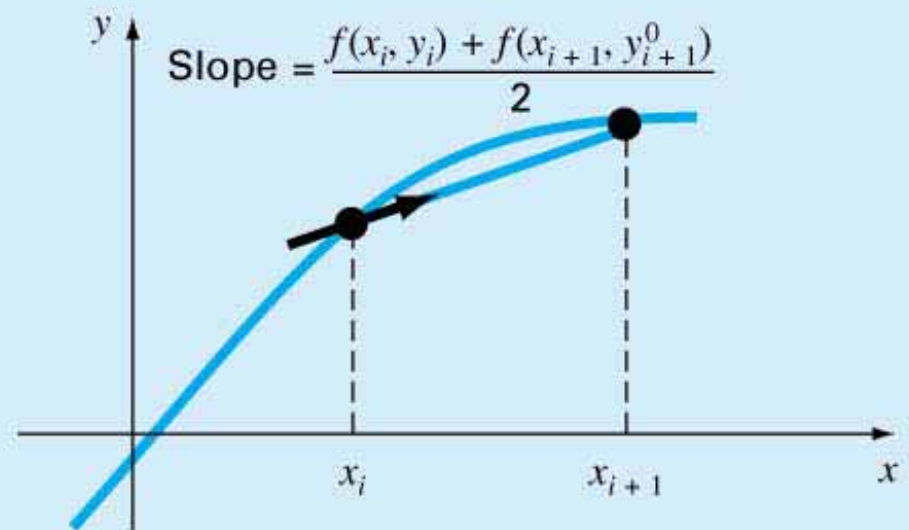
Kaedah Heun



Rajah 25.9



(a)



(b)

- Menggunakan dua persamaan – penganggar dan pembetul:

$$y'_i = f(x_i, y_i) \text{ di mana nilai seterusnya} \quad (25.12)$$

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (25.13)$$

$$y'_{i+1} = f(x_i, y_{i+1}^0) \quad (25.14)$$

persamaan
penganggar

Purata cerun adalah :

$$\overline{y'} = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1}^0)}{2}$$

persamaan
pembetul

$$\therefore y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1}^0)}{2} h$$

Dengan ralat,

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^j} \right| 100\%$$

Contoh

Gunakan kaedah Heun dengan saiz langkah, $h = 1$, untuk mengamirkan persamaan

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

dari $x = 0$ hingga $x = 4$ dengan keadaan awal $x = 0$ dan $y = 2$.

Penyelesaian(1)

* Persamaan penganggar :

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

1. cerun pada (x_0, y_0) adalah $y'_0 = 4e^0 - 0.5(2) = 3$
2. Gunakan psⁿ penganggar mencari y pada $x = 1.0$

$$y_1^0 = 2 + 3(1) = 5$$

3. Cari nilai y'_1

$$y'_1 = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.402164$$

4. Cari nilai purata y'

$$y' = \frac{3 + 6.402164}{2} = 4.701082$$

Penyelesaian(2)

5. Masukkan ke dalam persamaan pembetul:

$$y_1 = 2 + 4.701082(1) = 6.701082$$

Kaedah Titik Tengah

- Kaedah ini menggunakan kaedah Euler bagi mencari titik tengah nilai y :

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2} \quad (25.25)$$

- Bagi cerun pada titik tengah,

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \quad (25.26)$$

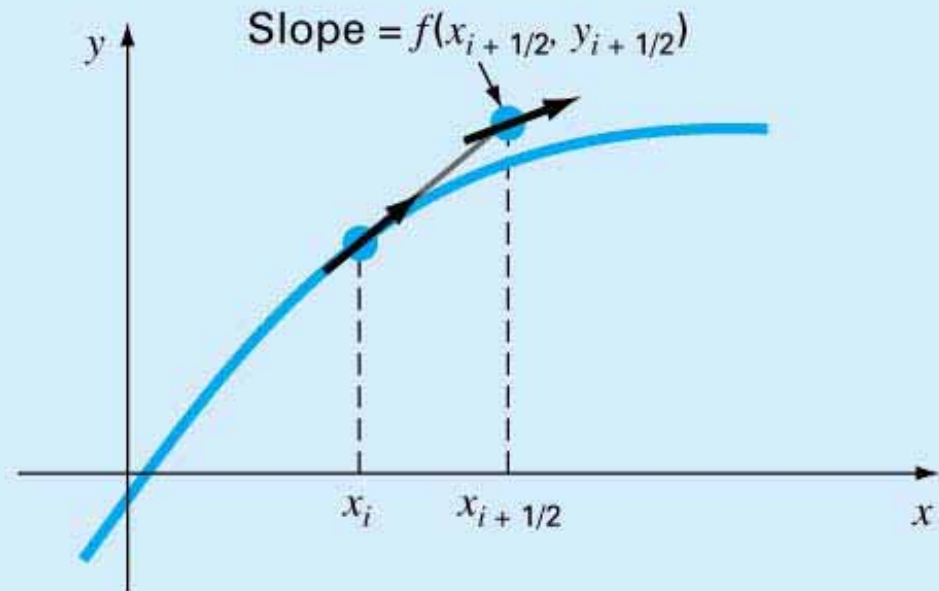
Kaedah Titik Tengah

- Cerun ini kemuadian digunakan untuk mencari nilai y_{i+1}

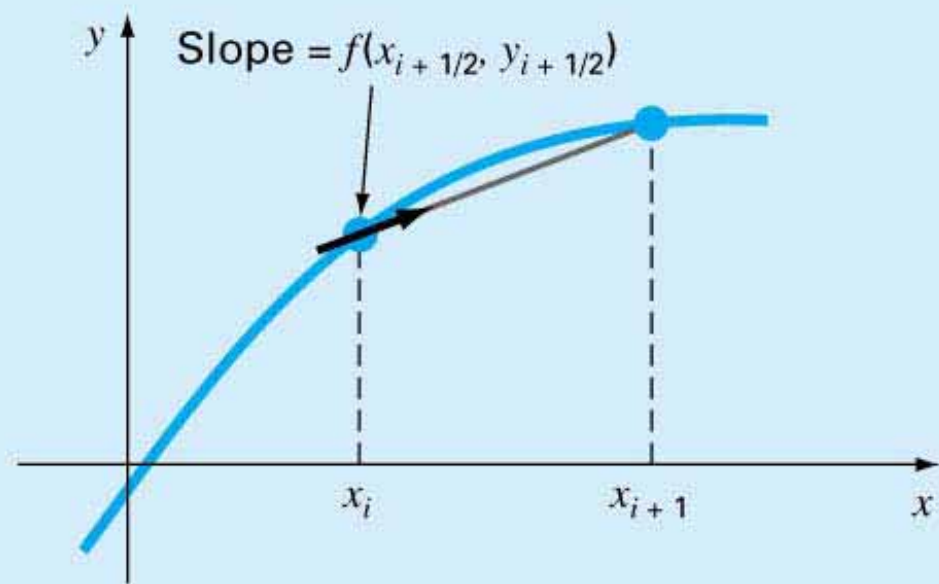
$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

(25.27)

Rajah 25.12



(a)



(b)

Kaedah Runge-Kutta



Kaedah Heun dengan pembetulan tunggal

- Dengan andaian $a_2 = \frac{1}{2}$, maka $a_1 = \frac{1}{2}$ dan $p_1 = q_{11} = 1$.

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) h \quad (25.36)$$

- di mana $k_1 = f(x_i, y_i)$ dan $(25.36a)$

$$k_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1h) \quad (25.36b)$$

Kaedah Titik Tengah ($a_2 = 1$)

- Dengan andaian $a_2 = 1$, maka $a_1 = 0$ dan $p_1 = q_{11} = 1/2$.

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h \quad (25.37)$$

- di mana $k_1 = f(x_i, y_i)$ dan $(25.37a)$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h) \quad (25.37b)$$

Kaedah Ralston ($a_2 = 2/3$)

- Dengan andaian $a_2 = 2/3$, maka $a_1 = 1/3$ dan $p_1 = q_{11} = 3/4$.

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2 \right)h \quad (25.38)$$

- di mana $k_1 = f(x_i, y_i)$ dan (25.38a)

$$k_2 = f(x_i + 0.75h, y_i + 0.75k_1h) \quad (25.38b)$$

Contoh

- Menggunakan kaedah titik tengah dan kaedah Ralston, kamirkan secara berangka:

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

- dari $x = 0$ hingga $x = 4$ dengan saiz langkah 0.5. Keadaan awal adalah $x = 0$ dan $y = 1$.

Penyelesaian(1)

- Menggunakan kaedah titik tengah,

$$k_1 = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$\begin{aligned} k_2 &= -2(0.25)^3 + 12(0.25)^2 - 20(0.25) + 8.5 \\ &= 4.21875 \end{aligned}$$

cerun di titik tengah boleh digunakan untuk menganggar

$$y(0.5) = 1 + 4.21875(0.5) = 3.109375$$

Penyelesaian(2)

- Menggunakan kaedah Ralston,

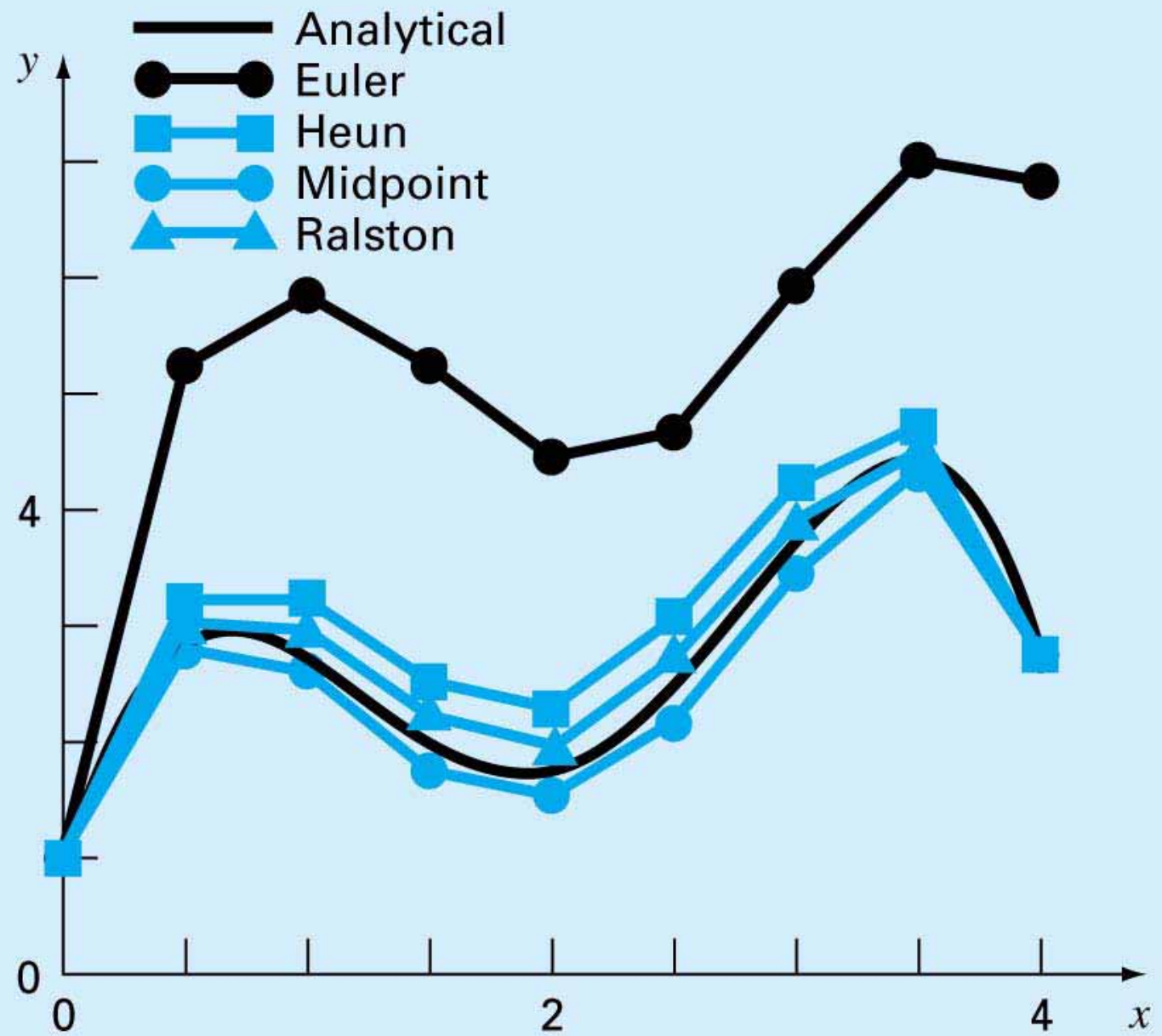
$$\begin{aligned}k_2 &= -2(0.375)^3 + 12(0.375)^2 - 20(0.375) + 8.5 \\ &= 2.58203125\end{aligned}$$

dengan cerun purata

$$\phi = \frac{1}{3}(8.5) + \frac{2}{3}(2.58203125) = 4.5546875$$

yang mana boleh digunakan untuk menganggar

$$y(0.5) = 1 + 4.5546875(0.5) = 3.27734375$$



Rajah 25.14

Kaedah Runge-Kutta peringkat ke-3

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \quad (25.39)$$

di mana

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.39a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (25.39b)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1h + 2k_2h) \quad (25.39c)$$

Kaedah Runge-Kutta peringkat ke-4

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (25.40)$$

di mana

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.40a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (25.40b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (25.40c)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (25.40d)$$