

Latihan

1. Pertimbangkan sistem persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2 \\ -0.2 \\ 0.8 \\ 1.5 \end{Bmatrix}$$

- Gunakan kaedah penghapusan Gauss biasa untuk mendapatkan penyelesaian bagi anjakan x_i .
 - Dengan menggunakan matriks segi tiga atas yang diperolehi melalui kaedah ini, kirakan penentu bagi matriks sebelah kiri di atas.
2. Satu sistem struktur yang mempunyai matriks kekakuan $\mathbf{K}$ telah dikenakan beban dalam bentuk vektor $\mathbf{F}$ menghasilkan anjakan dalam bentuk vektor $\mathbf{a}$, dan hubungannya diberikan oleh Hukum Hooke, iaitu:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$$
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{Bmatrix}.$$

Gunakan kaedah penghapusan Gauss dengan pangsaan untuk mendapatkan penyelesaian bagi anjakan $\mathbf{a}$ dan penentu bagi matriks $\mathbf{K}$.

3. Dengan menggunakan operasi aritmetik empat titik perpuluhan, selesaikan sistem persamaan di bawah dengan penghapusan Gauss biasa dan Gauss dengan pangsaan.

$$\begin{aligned} 0.729x_1 + 0.81x_2 + 0.9x_3 &= 0.6867 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0.8338 \\ 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 &= 1.0000 \end{aligned}$$

4. Uraikan matriks berikut dengan menggunakan kaedah penguraian LU:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Jika vektor sebelah kanan adalah $\mathbf{b} = (-11, 4, -16)^T$, dapatkan penyelesaian $\mathbf{x}$ bagi sistem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

5. Uraikan matriks berikut dengan menggunakan kaedah penguraian Crout:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Jika vektor sebelah kanan adalah $\mathbf{b} = (12, -8, 16)^T$, dapatkan penyelesaian $\mathbf{x}$ bagi sistem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

6. Selesaikan persamaan linear di bawah dengan menggunakan kaedah penguraian Cholesky:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Jika vektor sebelah kanan adalah $\mathbf{b} = (-4, 3, 3)^T$, dapatkan penyelesaian $\mathbf{x}$ bagi sistem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

7. Dapatkan songsangan dan penentu bagi matriks berikut melalui kaedah-kaedah penghapusan Gauss biasa dan Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Jika vektor $\mathbf{x}$ dan matriks-matriks $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{B}$ diberi sebagai

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan kuantiti-kuantiti 1-norma, norma Euclidean dan norma maksimum untuk vektor dan matriks-matriks di atas, sahkan:

- a. Hubungan ketidaksamaan segi tiga untuk hasil tambah $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.
- b. Hubungan ketidaksamaan Schwarz untuk hasil-hasil darab $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ dan $\mathbf{AB}$.

9. Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_1 &= 0.7 \\ 7x_1 + 10x_1 &= 1.0 \end{aligned}$$

Dapatkan nombor keadaan bagi sistem tersebut berdasarkan kepada norma Frobenius. Bandingkan jika terdapat sedikit perubahan 0.7 kepada 0.69 dan 1.0 kepada 1.01 dan berikan ulasan tentangnya.

10. Dapatkan hubungan di antara x dan y dalam matriks $\mathbf{A}$ yang diberikan seperti di bawah supaya ia menjadi singular:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ x & y & -1 \end{bmatrix}$$

11. Pertimbangkan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

- a. Dapatkan nilai a supaya sistem di atas menjadi singular.
- b. Tentukan sama ada sistem di atas bersandar secara linear atau tidak.

12. Pertimbangkan sistem persamaan linear kompleks berikut:

$$\begin{bmatrix} 2+2i & -1+2i \\ -3i & 3-2i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-4i \\ 2+4i \end{Bmatrix}$$

Dengan menulis $z_k = x_k + y_k i$, selesaikan sistem di atas.

13. Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan kaedah-kaedah lalaran Jacobi dan Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Gunakan nilai awal $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$. Dapatkan jawapan tepat kepada 5 angka perpuluhan. Bandingkan bilangan lelaran untuk kedua-dua kaedah ini.

14. Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan kaedah-kaedah lelaran Jacobi dan Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + x_3 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 &= -15 \\ x_1 - 7x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Gunakan nilai awal $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^T$ dan jalankan lelaran sehingga ralat relatifnya mencapai 0.05%. Bandingkan bilangan lelaran untuk kedua-dua kaedah ini.

15. Pertimbangkan sistem persamaan linear berlebihan di bawah:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- Dapatkan sistem persamaan linear hampiran bagi sistem di atas.
- Selesaikan sistem hampiran yang diterbitkan dalam (a).
- Kirakan sisihan piawai untuk selesaian yang diperolehi dalam (b).