

Latihan

1. Dengan menggunakan siri Taylor tertib pertama, kedua dan ketiga, ramalkan nilai fungsi berikut:

$$f(x) = e^x$$

pada $x = 0.1$ dengan mengambil $x = 0$ sebagai rujukan dan menggunakan saiz langkah 0.1, 0.05 dan 0.025. Untuk setiap kes, nilaikan ralat masing-masing berbanding dengan nilai sebenar $e^{0.1} = 1.10517$.

2. Dengan menggunakan siri Taylor tertib pertama, kedua dan ketiga, ramalkan nilai fungsi berikut:

$$f(x) = \sin x$$

pada $x = \frac{1}{6}\pi$ dengan mengambil $x = 0$ sebagai rujukan dan menggunakan saiz langkah $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{12}\pi$ dan $\frac{1}{18}\pi$. Untuk setiap kes, nilaikan ralat masing-masing berbanding dengan nilai sebenar $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$.

3. Nilaikan penghampiran beza terbahagi hadapan, belakang dan tengah dengan saiz langkah 0.1, 0.05, 0.025 untuk fungsi berikut:

$$f(x) = e^x$$

pada $x = 0$. Untuk setiap kes, nilaikan ralat masing-masing berbanding dengan nilai sebenar $f'(0) = e^0 = 1$.

4. Nilaikan penghampiran beza terbahagi hadapan, belakang dan tengah dengan saiz langkah $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{12}\pi$ dan $\frac{1}{18}\pi$ untuk fungsi berikut:

$$f(x) = \sin x$$

pada $x = \frac{1}{6}\pi$. Untuk setiap kes, nilaikan ralat masing-masing berbanding dengan nilai sebenar $f'(\frac{1}{6}\pi) = \cos(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

5. Dalam setiap kes berikut, gunakan aturan trapezium dan aturan 1/3-Simpson untuk bilangan segmen 2, 4 dan 8, dan bandingkan dengan nilai sebenar seperti yang diberikan di bawah:

- a. $\int_0^{\pi} e^x \cos 4x \, dx = \frac{e^{\pi} - 1}{17}$
- b. $\int_0^1 x^{5/2} \, dx = \frac{2}{7}$
- c. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \, dx = 7.95493$

6. Diketahui bahawa hasil kamiran berikut adalah:

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \pi$$

Nilaikan kamiran di atas menggunakan kaedah-kaedah berangka berikut, dan dapatkan ralat kamiran relatif untuk setiap kes berbanding dengan nilai sebenar:

- a. Aturan trapezium dengan empat langkah.
 - b. Aturan 1/3-Simpson dengan empat langkah.
 - c. Kuadratur Gauss empat-titik dengan satu langkah.
7. Dalam pengiraan kerja haba dalam satu litar elektrik, penilaian hasil kamiran arus $i(t)$ terhadap masa t diperlukan, di mana arus tersebut adalah arus ulang-alik berkala yang melalui suatu penapis arus terus. Diberi fungsi arus tersebut untuk kalaan pertama adalah:

$$i(t) = \begin{cases} 4e^{-1.5t} \sin 2\pi t & \text{untuk } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T \\ 0 & \text{untuk } \frac{1}{2}T \leq t \leq T \end{cases}$$

Secara teori, diketahui bahawa hasil kamiran tersebut adalah:

$$\int_0^T i(t) \, dt = \frac{32\pi(e^{-0.75} + 1)}{16\pi^2 + 9}$$

Dengan mengambil tempoh kalaan $T = 1$ saat dan saiz langkah $h = 0.125$ saat, dapatkan hasil kamiran fungsi di atas secara berangka dengan menggunakan kaedah-kaedah berikut, dan bandingkan keputusannya dengan menggunakan nilai teori:

- a. Aturan trapezium.
- b. Aturan 1/3-Simpson.
- c. Kuadratur Gauss dua-titik.

8. Fungsi ralat $\text{erf}(x)$ banyak digunakan sebagai penyelesaian kepada beberapa masalah fizik seperti taburan suhu dalam sebatang rod logam dan halaju aliran likat di atas permukaan yang memecut. Ia ditakrifkan sebagai:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Dapatkan nilai fungsi $\text{erf}(0.5)$ melalui kaedah berangka dengan menggunakan:

- Aturan trapezium dengan enam langkah.
- Aturan 1/3-Simpson dengan enam langkah.
- Aturan 3/8-Simpson dengan enam langkah.
- Kuadratur Gauss empat-titik dengan satu langkah.

Bandingkan keputusan anda dengan menggunakan nilai teori, iaitu

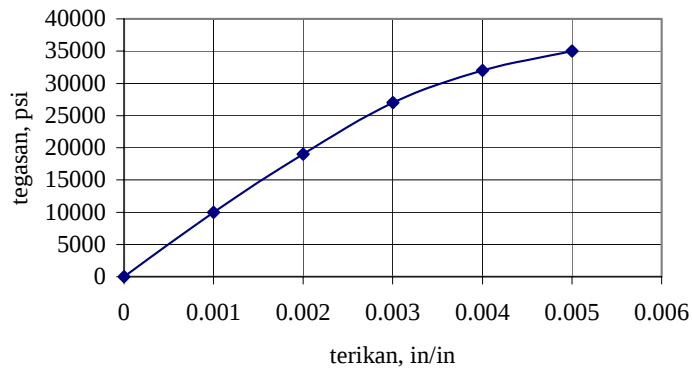
$$\text{erf}(0.5) = 0.520500$$

9. Anggarkan pengkamiran berikut dengan menggunakan kuadratur Gauss empat titik.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_2^4 x^3 \ln x dx$$

10. Ujian tegasan-terikan ke atas satu komponen dalam sayap kapal terbang telah dijalankan di mana keputusannya ditunjukkan dalam jadual dan rajah di bawah.

ε , in/in	σ , psi
0.000	0
0.001	10000
0.002	19000
0.003	27000
0.004	32000
0.005	35000



Dalam ujian tersebut, komponen itu didapati patah pada terikan 0.005 in/in. Daripada keputusan ini, gunakan aturan trapezium dan kuadratur Gauss bagi mendapatkan tenaga terikan yang tersimpan dalam bahan komponen sebelum ia patah, di mana ini adalah penting bagi mendapatkan kebolehharapan sistem sayap kapal terbang tersebut. Sebagai panduan, lengkok ujikaji didapati memberikan persamaan tegasan-terikan:

$$\sigma = 11.2514 \times 10^6 \varepsilon e^{-88.52\varepsilon}$$