

Latihan

1. Selesaikan persamaan kebezaan berikut:

$$y'(t) = -y^{1.5} + 1, \text{ dengan } y(0) = 10$$

menggunakan kaedah Euler dengan saiz langkah 0.1 untuk julat $0 \leq t \leq 1$. Kemudian, plotkan graf y melawan t .

2. Selesaikan

$$y'(t) = yt + 1, \text{ dengan } y(0) = 0$$

menggunakan kaedah peramal-pembetulan (Huen) dengan saiz langkah 0.1, 0.5 dan 1.0 untuk julat $0 \leq t \leq T$, dengan $T = 1, 2$ dan 5 . Ulang dengan menggunakan kaedah Runge-Kutta tertib ketiga.

3. Selesaikan sistem persamaan kebezaan serentak berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= x + y_1 y_2, & y_1(0) &= 0, \\ \frac{dy_2}{dx} &= x - y_1, & y_2(0) &= 1, \end{aligned}$$

dari $x = 0$ ke $x = 1$ menggunakan kaedah peramal-pembetulan atau kaedah Heun dengan saiz langkah $h = 0.2$. Plotkan graf y_1 dan y_2 melawan x , serta graf y_2 melawan y_1 .

4. Ungkapkan persamaan kebezaan biasa tertib ketiga berikut:

$$\begin{aligned} y''' + xy'' - xy - 2y &= x, \\ y(0) = y''(0) &= 0, \quad y'(0) = 1, \end{aligned}$$

kepada sistem yang mengandungi tiga persamaan kebezaan biasa tertib pertama. Seterusnya, selesaikannya dengan menggunakan kaedah titik tengah dari $x = 0$ ke $x = 1$ dengan saiz langkah $h = 0.2$.

5. Gunakan kaedah luruan/Runge-Kutta tertib keempat untuk menyelesaikan persamaan kebezaan biasa tertib kedua berikut:

$$8 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - y = x,$$

$$y(0) = 5, \quad y(10) = 8.$$

Gunakan saiz langkah $h = 2$. Plotkan graf y melawan x .

6. Gunakan kaedah beza terhingga untuk menyelesaikan persamaan kebezaan biasa tertib kedua berikut:

$$y'' + yy' = e^{x/2},$$

$$y(-1) = 2, \quad y(1) = 3.$$

Gunakan saiz langkah $h = \frac{1}{3}$.

7. Gunakan kaedah beza terhingga untuk menyelesaikan persamaan kebezaan biasa tertib kedua berikut:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - 1.2 \times 10^{-7} (T + 273)^4 + 5(150 - T) = 0,$$

$$T(0) = 200, \quad T(1.0) = 100.$$

Gunakan saiz langkah $h = 0.2$.

8. Dapatkan nilai-nilai eigen terbesar dan terkecil bagi matriks berikut, serta vektor-vektor eigen yang sepadan dengannya:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Kirakan juga satu lagi nilai eigen untuk matriks di atas.

9. Perubahan kepekatan untuk satu bahan kimia $c(t)$ yang dicampurkan dalam satu reaktor biokimia boleh dihubungkan dengan masa t oleh persamaan terbitan biasa:

$$V \frac{dc}{dt} = F - Qc - kVc^2, \quad c(0) = 0,$$

dengan V adalah isipadu reaktor (10 m^3), F adalah kadar suapan (200 g/min), Q adalah kadar alir ($1 \text{ m}^3/\text{min}$) dan k adalah kadar tindak balas tertib kedua ($0.15 \text{ m}^3/\text{g}\cdot\text{min}$). Selesaikan persamaan di atas dengan menggunakan saiz langkah $h = 0.25$ saat, gunakan kaedah peramal-

pembetulan (Huen) untuk menyelesaikan masalah di atas sehingga perbezaan nilai c terkini berbanding dengan nilai terdahulu kurang 5%.

10. Pecutan sebuah kapal terbang untuk naik diberikan oleh hubungan:

$$\frac{dv}{dt} = v^2 + t^3, \quad v(0) = 0,$$

dengan halaju v dalam km/s dan masa t dalam saat. Dengan menggunakan langkah masa bersaiz 0.2 saat, kirakan nilai halaju sehingga masa 1 saat dengan menggunakan kaedah Runge-Kutta tertib kedua versi titik tengah dan Ralston, dan tuliskan jawapan tepat kepada empat angka perpuluhan. Ulang dengan kaedah Adam-Moulton tertib keempat. Bandingkan graf yang dihasilkan oleh ketiga-tiga keputusan. Mengapa kaedah Euler tidak sesuai digunakan untuk menyelesaikan masalah di atas?

11. Sekeping logam berjisim 0.1 kg dan suhunya 200°C (473 K) dipindahkan ke sebuah bilik bersuhu 25°C. Logam ini disejukkan melalui pemindahan haba secara perolakan dan sinaran. Andaikan bahawa taburan suhu adalah seragam pada logam tersebut dan perubahan suhu T dengan masa t dihubungkan oleh:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{A}{\rho c V} [\varepsilon \sigma (297^4 - T^4) + h_c (297 - T)]$$

dengan T ialah suhu dalam unit Kelvin, ρ adalah ketumpatan logam (300 kg/m³), V adalah isipadu (0.001 m³), A adalah luas keratan rentas logam tersebut (0.25 m²), c adalah haba spesifik (900 J/kg·K), h_c adalah pekali pemindahan haba perolakan (30 J/m²·K), ε adalah keberpancaran logam (0.8) dan σ adalah pekali Stefan-Boltzmann (5.67×10⁻⁸ W/m²·K⁴). Selesaikan persamaan diatas untuk mendapatkan suhu dengan menggunakan saiz masa 20 saat. Gunakan kaedah Runge-Kutta versi Huen sehingga perbezaan nilai suhu terkini dengan suhu terdahulu kurang dari 0.1 %. Pada masa yang sama plotkan graf suhu (K) melawan masa (saat).

12. Imbangan jisim suatu bahan kimia bagi sebuah reaktor kimia diberikan oleh hubungan kekekatannya $c(t)$ [mg/m³] terhadap masa t [min], iaitu:

$$V \frac{dc}{dt} = Q(c_{in} - c), \quad c(0) = 10 \text{ [mg/m}^3\text{]},$$

dengan V adalah isipadu suapan (100 m^3), Q adalah kadar alir ($5 \text{ m}^3/\text{min}$), dan c_{in} adalah kepekatan bahan yang masuk ke dalam reaktor, di mana ia diberikan oleh

$$c_{\text{in}} = 50(1 - e^{-0.1t}) \text{ [mg/m}^3\text{]}$$

Jalankan pengiraan dengan menggunakan kaedah Ralston untuk mendapatkan nilai kepekatan dari $t = 0$ hingga $t = 20 \text{ min}$ dengan saiz langkah 2 min.

13. Persamaan berikut boleh digunakan untuk memodelkan pesongan $y(z)$ bagi sebatang tupang langsing yang tertanam dan mengalami beban tiupan angin:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{f}{2EI} (L - z)^2, \quad y'(0) = y(0) = 0,$$

dengan E adalah modulus keelastikan ($1.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2$), I adalah momen sifatekun luas (0.05 m^4), L adalah tinggi tupang (30 m), dan f adalah taburan daya angin dan berubah mengikut ketinggian, di mana perubahan ini diberikan oleh

$$f(z) = \frac{200z}{5 + z} e^{-2z/30} \text{ [N/m]}$$

Jalankan pengiraan dengan menggunakan kaedah Runge-Kutta tertib ketiga untuk mendapatkan nilai pesongan di sepanjang tiang tersebut. Gunakan saiz langkah 5 m.

14. Pertumbuhan penduduk sesebuah negara $p(t)$ terhadap masa t [tahun] boleh dimodelkan melalui hubungan:

$$\frac{dp}{dt} = Gp, \quad p(0) = 20 \text{ juta orang.}$$

Dalam hubungan di atas, G adalah kadar pertumbuhan dan boleh diperolehi melalui:

$$G = G'(p_{\text{maks}} - p)$$

dengan G' adalah kadar pertumbuhan kebersandaran penduduk (10^{-4} per orang-tahun) dan p_{maks} adalah jumlah penduduk maksimum yang boleh ditampung oleh negara tersebut (70 juta orang). Ramalkan pertumbuhan penduduk dalam masa 5 tahun akan datang menggunakan kaedah multi langkah tertib ketiga dengan saiz langkah 1 tahun.

15. Untuk setengah perintang, arus elektrik $i(t)$ yang melalui perintang tersebut boleh dimodelkan terhadap masa t [tahun] melalui hubungan:

$$L \frac{di}{dt} + R \left[\frac{i}{I} - \left(\frac{i}{I} \right)^3 \right] = 0, \quad i(0) = 0.6 \text{ A.}$$

dengan I adalah arus rujukan yang bersamaan dengan satu, L adalah aruhan ($1 \Omega \cdot s$) dan R adalah rintangan (2Ω). Jalankan pengiraan dengan menggunakan kaedah Runge-Kutta tertib keempat untuk mendapatkan nilai kepekatan dari $t = 0$ hingga $t = 1$ s dengan saiz langkah 0.2 s.

16. Dalam masalah kekonduksian haba di antara dua titik di atas sebatang rod logam, kadar fluks haba diberikan oleh:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{dT}{dx}, \quad Q(0) = 0,$$

dengan Q adalah fluks haba, t adalah masa [s], λ adalah suatu pemalar ($1.67 \text{ J} \cdot \text{cm/s}$), A adalah luas keratan rentas rod tersebut (10 cm^2), T adalah suhu dan x adalah koordinat di sepanjang rod tersebut. Untuk masalah ini, kecerunan suhu boleh dikira melalui hubungan:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{100(L-x)(20-t)}{100-xt}$$

dengan L adalah panjang rod (20 cm) dan x bersamaan 2.5 cm . Jalankan pengiraan dengan menggunakan kaedah multilangkah tertib keempat untuk mendapatkan nilai fluks haba dari $t = 0$ hingga $t = 10$ s dengan saiz langkah 2 s.